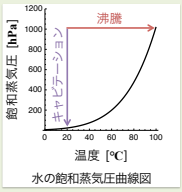
# 振動圧力場における単一気泡の半径変化を表わす数理モデルの解析

池田研究室）

## 1. 研究背景と目的

超音波を液体に照射することによって発生させるキャビテーションを、音響キャビテーションという。

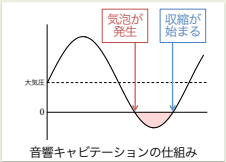
**キャビテーション**：水圧が低下して飽和蒸気圧に達し、気泡が発生する現象[1]



水の飽和蒸気圧曲線図

圧力が再び上昇

気泡が**崩壊**し、衝撃波が生じる



音響キャビテーションの仕組み

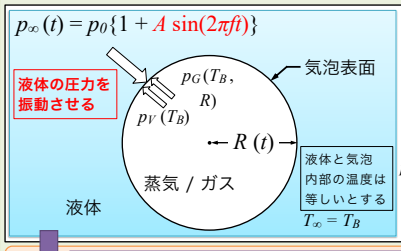
超音波洗浄機への活用

最近では、この衝撃波を有効に活用しようとする研究も活発になってきている(右図)。

**研究目的** 単一気泡の気泡半径変化の特徴を詳しく調べ、気泡の膨張、収縮、崩壊との関係性を探ること。

## 2. レイリー・プリセット方程式の定式化

$$p_\infty(t) = p_0\{1 + A\sin(2\pi f t)\}$$




$R(t)$：気泡半径 [m]
$T_\infty$：遠方の温度 [K]
$p_\infty(t)$：遠方の圧力 [Pa]
$\rho_L$：液体の密度 [kg/m³]
$\nu_L$：液体の表面張力 [N/m]
$S$：気泡内部の温度 [K]
$T_B$：気泡内部の液体の蒸気圧 [Pa]
$p_V(T_B)$：大気圧 [Pa]
$p_G(T_B, R)$：周波数 [Hz]
$p_0$：振幅を決める値
$f$：
$A$：

$R(t)$について無次元化し、$ft = a$と変数変換

$$\frac{p_V - p_0}{\rho_L} - \frac{p_0}{\rho_L}A\sin(2\pi a) + \frac{p_{G_0}}{\rho_L}\left(\frac{1}{h(a)}\right)^3 = R_0^2 f^2 h(a)\frac{d^2h(a)}{da^2} + \frac{3}{2}\left(R_0 f\frac{dh(a)}{da}\right)^2 + \frac{4\nu_L f}{h(a)}\frac{dh(a)}{da} + \frac{2S}{\rho_L R_0 h(a)}$$

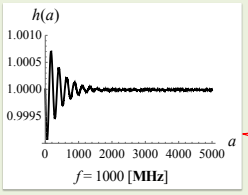
ただし、$p_{G_0} = p_0 - p_V + \frac{2S}{R_0}$

初期条件：$\begin{cases} h(0) = 1 \\ \frac{dh}{da}(0) = 0 \end{cases}$

**$h(a)$は、時刻$a$において、初期半径$R_0$に対して何倍の大きさであるかを表わす。**

## 3. レイリー・プリセット方程式の数値解析

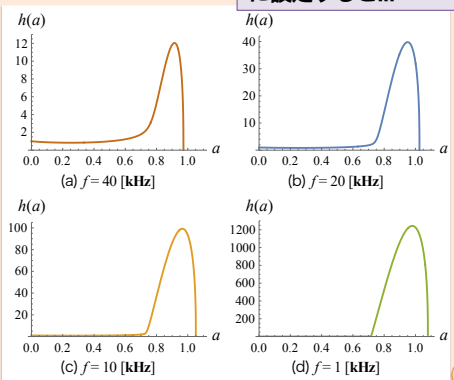
**数値解析の仮定**
初期半径：$R_0 = 0.92$ [μm]
周囲流体：水
不凝縮ガス：空気
温度：$T_\infty = T_B = 293.2$ [K]
振幅を決める値：$A = 1.5$




**高周波**で加振を行うと、気泡半径は**初期気泡半径に収束する**(先行研究[2])

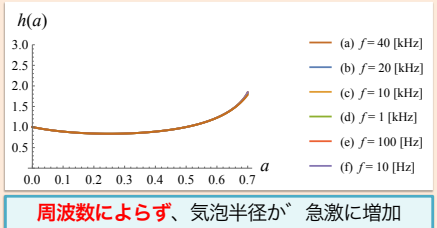
**しかし**

**10 [Hz] ≤ $f$ ≤ 40 [kHz] に設定すると…**




・気泡半径は急激な増加、減少を経て**0に至る**
・周波数が低くなるにつれて、気泡半径の最大値が大きくなる

**気泡半径が増加を始めるまでのグラフを同時に表示すると…**



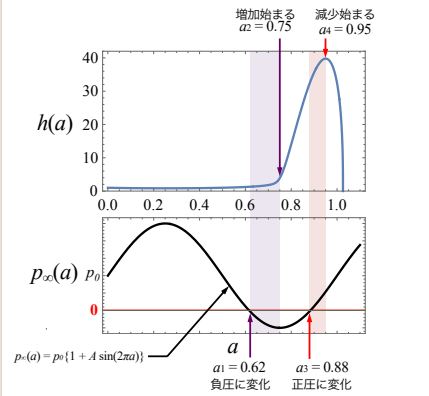

**周波数によらず**、気泡半径が急激に増加を始めるまでのグラフの概形がほぼ一致

**各周波数に対する気泡半径が0に近づく$a$の値を調べると…**

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $a$ | 0.972 | 1.026 | 1.051 | 1.080 | 1.084 | 1.085 |

周波数が低くなるにつれて、
・気泡半径が0に近づく$a$の値が大きくなる

**気泡半径変化と液体圧力変化の関係を調べると…**




・液体の圧力変化に対して気泡半径変化は遅れる
・液体の圧力が負圧に変化したときよりも、正圧に変化したときのほうが速く応答する

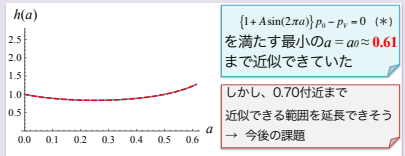
**まとめ** **10 [Hz] ≤ $f$ ≤ 40 [kHz]のとき、高周波な場合と異なり気泡半径が0に至る。また、負圧になったとき気泡半径の増加が始まることは現象に即していて、その際反応に時間差が生じることもわかった。**

## 4. レイリー・プリセット方程式の近似

**まとめ** **$a$の範囲ごとに解の挙動を近似できた！！**

### (1) 気泡半径が急激に増加を始めるま

$$\frac{p_V - p_0}{\rho_L} - \frac{p_0}{\rho_L}A\sin(2\pi a) + \frac{p_{G_0}}{\rho_L}\left(\frac{1}{h(a)}\right)^3 = \frac{2S}{\rho_L R_0 h(a)}$$




$\{1 + A\sin(2\pi a)\}p_0 - p_V = 0$ (＊)
を満たす最小の$a = a_0 \approx$ **0.61**
まで近似できていた

しかし、0.70付近まで近似できる範囲を延長できそう
→ 今後の課題

**10 [Hz] ≤ $f$ ≤ 40 [kHz]** において、
数値解と近似解のグラフの概形がほぼ一致

### (2) 気泡半径が最大値に達し、減少に転じて0に至るまで

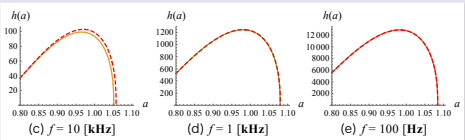
(2-1) $a \geq 0.80$ のとき

$$\frac{p_V - p_0}{\rho_L} - \frac{p_0}{\rho_L}A\sin(2\pi a) = R_0^2 f^2 h(a)\frac{d^2h(a)}{da^2} + \frac{3}{2}\left(R_0 f\frac{dh(a)}{da}\right)^2$$

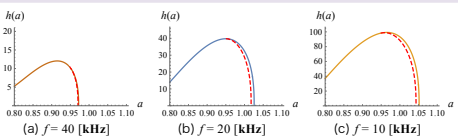
sinの項消去

(2-2) $a \geq 0.95$ のとき

$$\frac{p_V - p_0}{\rho_L} = R_0^2 f^2 h(a)\frac{d^2h(a)}{da^2} + \frac{3}{2}\left(R_0 f\frac{dh(a)}{da}\right)^2$$




**10 [Hz] ≤ $f$ ≤ 10 [kHz]**において、
数値解と近似解のグラフの概形がほぼ一致




**10 [Hz] ≤ $f$ ≤ 40 [kHz]**において、
数値解と近似解のグラフの概形がほぼ一致

## 5. 結論

**その1** **10 [Hz] ≤ $f$ ≤ 40 [kHz]のとき、$h(a)$が0に至るという結果が得られ、これは気泡の崩壊を示していると考えられる。**

**その2** **$a$の範囲ごとに解の挙動を近似することができた**

## 6. 参考文献

[1] 加藤洋治, 新板キャビテーション – 基礎と最近の進歩 –, 槇書店 (1999)
[2] 鹿田翔平, 吉村浩明, レイリー・プリセット方程式に見られる単一気泡の非線形現象 (2011)
[3] Christopher E. Brennen, *Fundamentals of Multiphase Flows*, Cambridge University Press (2005)