環の取り替えを手法とする階数1のHuneke-Wiegand予想*

後藤四郎[†] ・高橋亮[‡] ・谷口直樹[§] ・Hoang Le Truong[¶] ・塚本三一郎

Huneke-Wiegand conjecture of rank one with the change of rings

Shiro GOTO, Ryo TAKAHASHI, Naoki TANIGUCHI, Hoang Le TROUNG, So-ichiro TSUKAMOTO

Abstract

Let $(R, \mathfrak{m})$ be a Cohen-Macaulay local ring of dimension one and assume that R possesses a canonical ideal K_R. Let I be a faithful ideal of R. We explore the problem which asks when $I \otimes_R I^\vee$ is torsionfree, where $I^\vee = \mathrm{Hom}_R(I, \mathrm{K}_R)$. If the multiplicity of R with respect to $\mathfrak{m}$ is at most 4, or if $\mathfrak{m}\overline{R} \subseteq R$ where $\overline{R}$ stands for the integral closure of R in its total ring of fractions, then $I \cong R$ or $I \cong \mathrm{K}_R$ as an R-module, once $I \otimes_R I^\vee$ is torsionfree. Applying this result to the case where the base rings are Gorenstein numerical semigroup rings $R = k[[t^{a_1}, t^{a_2}, \ldots, t^{a_\ell}]]$ over a field k (here t denotes an indeterminate and $0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_\ell$ are integers with $\gcd(a_1, a_2, \ldots, a_\ell) = 1$), we will show in several cases that I is a principal ideal, once $I \otimes_R \mathrm{Hom}_R(I, R)$ is torsionfree, provided I is generated by monomials in t. A higher dimensional assertion is discussed.

目 次

1 序文 **2**

2 環の取り替え **3**

3 定理 1.4 の証明 **5**

4 数値半群環と単項式イデアル **7**

5 e$(R) = 7$ の場合 **9**

6 捩れ部分 T$(I \otimes_R J)$ **10**

7 例 **11**

*本論文の一部は，2013 年 1 月 30 日（水）に第 25 回可換環論セミナー（奈良県新公会堂），2013 年 3 月 18 日（月）に第 18 回代数学若手研究会（大阪大学）で口頭発表済.

[†]明治大学理工学部数学科

[‡]名古屋大学大学院多元数理科学研究科

[§]明治大学大学院理工学研究科基礎理工学専攻（数学系）

[¶]Institute of Mathematics, Vietnam Academy of Science and Technology

Key Words and Phrases
Huneke-Wiegand conjecture, Cohen-Macaulay ring, Gorenstein ring, multiplicity, numerical semigroup ring, canonical ideal

1 序文

M，N は可換整域 R 上の torsionfree 有限生成加群とする．本研究は，テンソル積 $M \otimes_R N$ がいつ再び torsionfree となるかという問題を解析することを目的とする．この問題は次の予想に遡る．

予想 1.1 (Huneke-Wiegand conjecture [10])**.** R は Gorenstein 局所整域とし，M は有限生成 R-加群で等式 $\operatorname{depth}_R M = \dim R$ を満たすとする．もしも $M \otimes_R \operatorname{Hom}_R(M, R)$ が torsionfree なら，M は自由 R-加群である．

基礎環 R が整閉整域の場合は， M. Auslander の古典的な結果 [1, Proposition 3.3] として，予想 1.1 が正しいことが知られている． C. Huneke と R. Wiegand [11] は，環 R が超曲面の場合にこの予想が正しいことを示しただけではなく，予想 1.1 は $\dim R = 1$ の場合に帰着されることを示している ([11, 473-474])．しかしながら予想自体は一般には未解決であり，R が完全交差局所環や体上の数値半群環の場合でさえ，次の予想 1.2 に対する完全な解答は得られていない．数値半群環を対象とする優れた考察は，[2, 6, 7, 8] にある．

予想 1.2. R は 1 次元 Gorenstein 局所整域とし，I は R のイデアルとする．このとき，$I \otimes_R \operatorname{Hom}_R(I, R)$ が torsionfree なら，I は単項イデアルである．

本論文の関心は，$\operatorname{Hom}_R(I, R)$ を $\operatorname{Hom}_R(I, \mathrm{K}_R)$ で置き換えるとどのようなことが起こるかという疑問にある．ここで，K_R は R の正準加群を表す．問いの方向をこのように変えることの利点の一つは，I と $\operatorname{Hom}_R(I, \mathrm{K}_R)$ の間に対称性が発生することである．もう一つの利点は，後に詳述するように，基礎環の取り替えが可能となることにある (命題 2.3)．もちろん，R が Gorenstein のときは，$\mathrm{K}_R \cong R$ であるから，予想 1.2 と予想 1.3 は全く同じものである．

予想 1.3. R は 1 次元 Cohen-Macaulay 局所環とし，正準加群 K_R を持つと仮定する．I は R の忠実イデアルとする．$I \otimes_R \operatorname{Hom}_R(I, \mathrm{K_R})$ が torsionfree なら，R-加群として $I \cong R$ または $I \cong \mathrm{K_R}$ である．

ここで予め述べておくべきことは，予想 1.3 は一般には正しくないという事実である．しかしながら，本論文が示すように，予想 1.3 を解こうとする努力からは，予想 1.2 に関する多くの新たな知見が得られるのである．

さてそこで，本論文の構成と達成した結果を以下に述べよう．本論文の核は次の定理 1.4 であり，高次元の理論構成の入り口ともなっている（系 1.5 参照）.

定理 1.4. $(R, \mathfrak{m})$ は 1 次元 *Cohen-Macaulay* 局所環とし，R は正準イデアル K_R を持つとする．すなわち，K_R は環 R の分数イデアルであって，正準加群と同型である．$\mathrm{e}(R) \le 4$ または $\mathfrak{m}\overline{R} \subseteq R$ であると仮定する．ここで，$\mathrm{e}(R)$ と $\overline{R}$ は，それぞれ，$\mathfrak{m}$ に関する R の重複度と全商環内における R の整閉包を表す．I は R の分数イデアルとする．このとき，$I \otimes_R \operatorname{Hom}_R(I, \mathrm{K_R})$ が *torsionfree* なら，R-加群として $I \cong R$ または $I \cong \mathrm{K_R}$ である．

系 1.5. R は *Cohen-Macaulay* 局所環で $\dim R \ge 1$ とする．高さ 1 の任意の $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ に対し，局所化 $R_{\mathfrak{p}}$ は *Gorenstein* 環であってかつ $\mathrm{e}(R_{\mathfrak{p}}) \le 4$ であると仮定する．I は R の分数イデアルとしよう．このとき，$I \otimes_R \operatorname{Hom}_R(I, R)$ が反射的なら，I は単項である．

定理 1.4 と系 1.5 の証明は，第 3 節で行う．

第 2 節は，定理 1.4 と系 1.5 の証明のための準備にあてる．

第 4 節では，そして第 3 節の一部でも，数値半群環を考察する．k は体とし，$V = k[[t]]$ は k 上の形式的冪級数環とする．$0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_\ell$ は $\gcd(a_1, a_2, \ldots, a_\ell) = 1$ であるような整数とし，

$$H = \langle a_1, a_2, \ldots, a_\ell \rangle = \{\sum_{i=1}^{\ell} c_i a_i \mid 0 \le c_i \in \mathbb{Z}\}$$

は a_i たちで生成された数値半群とする．このとき

$$R = k[[t^{a_1}, t^{a_2}, \ldots, t^{a_\ell}]] \quad \subseteq \quad V$$

とおき，体 k 上 H の半群環と呼ぶ．この記法を用いるとき，定理 1.4 から次の結果が従う．この定理の証明は第 3 節で行う．

定理 1.6. $R = k[[t^a, t^{a+1}, \ldots, t^{2a-2}]]$ $(a \geq 3)$ とし，I は R のイデアルとする．R-加群 $I \otimes_R \mathrm{Hom}_R(I, R)$ が *torsionfree* なら，I は単項イデアルである．

定理 1.6 は，予想 1.2 が成立する Gorenstein 局所整域の新たなクラスを提示する．実際，定理 1.6 の環 R は Gorenstein 局所環であって，$a \geq 5$ なら完全交差ではない (例 3.7)．

第 4 節と第 5 節では，数値半群環内で不定元 t の単項式で生成されたイデアル，すなわち単項式イデアルを解析する．主結果は次のようにまとめることができる．この結果は基礎環 R が Gorenstein である場合の [6, Main Theorem] を含んでいる．

定理 1.7. $R = k[[t^{a_1}, t^{a_2}, \ldots, t^{a_\ell}]]$ は体 k 上の数値半群環とし，$\mathrm{e}(R) \leq 7$ とする．I $(\neq (0))$ は単項式イデアルとする．このとき，$I \otimes_R \mathrm{Hom}_R(I, \mathrm{K}_R)$ が *torsionfree* なら，R-加群として $I \cong R$ または $I \cong \mathrm{K_R}$ である．

定理 1.7 は，$\mathrm{e}(R) = 9$ のときは，一般には正しくない (例 7.1)．したがって，予想 1.3 も一般には正しくないが，$\mathrm{e}(R) = 8$ の場合はどちらであるかは結論がでず，未解決のまま残っている．実際，重複度 8 の数値半群環 R 内の単項式イデアル I で，次の 2 条件

$$\mu_R(I) {\cdot} \mu_R(\mathrm{Hom}_R(I, \mathrm{K}_R)) = \mu_R(\mathrm{K}_R) \quad \text{かつ} \quad I {\cdot} (\mathrm{K}_R : I) = \mathrm{K}_R$$

（ここで，$\mu_R(*)$ は極小生成系の個数を表す）を満たすものは数多く存在するが，我々が知る限り，そのようなイデアル I に対し R-加群 $I \otimes_R \mathrm{Hom}_R(I, \mathrm{K}_R)$ は torsionfree ではない．

第 6 節で，イデアル I, J について，$I \otimes_R J$ の捩れ部分 $\mathrm{T}(I \otimes_R J)$ を計算する方法を手短に紹介する．第 7 節で具体例を解析する際に，この方法を必要とするからである．

以下，とくに断らない限り，R は Cohen-Macaulay 局所環で，極大イデアル $\mathfrak{m}$ を持つものとする．$F = \mathrm{Q}(R)$ によって，環 R の全商環を表す．有限生成 R-加群 M に対し，$\mu_R(M)$ と $\ell_R(M)$ は，それぞれ M の極小生成系内の元の個数と加群 M の長さを表す．

2　環の取り替え

本節の目的は，定理 1.4 の証明に必要な事実をまとめることにある．

R は Cohen-Macaulay 局所環，$\mathfrak{m}$ はその極大イデアルとし，$\dim R = 1$ と仮定する．$F = \mathrm{Q}(R)$ によって R の全商環を表し，$\mathcal{F}$ により R の分数イデアル I で $FI = F$ を満たすもの全体のなす集合を表す．以下，R は正準イデアル K_R を持つと仮定する．したがって，K_R は，R の分数イデアルであって，R の正準加群と同型である．このような分数イデアルが存在するための必要十分条件は，$\mathrm{Q}(\widehat{R})$ が Gorenstein 環であることである ([9, Satz 6.21])（ここで，$\widehat{R}$ は $\mathfrak{m}$-進位相に関する R の完備化を表す）．

$I \in \mathcal{F}$ とし，$I^\vee = \mathrm{Hom}_R(I, \mathrm{K}_R)$ とおき，$t(x \otimes f) = f(x)$ $(x \in I, f \in I^\vee)$ で定まる R-線型写像

$$t : I \otimes_R I^\vee \to \mathrm{K}_R$$

を考え，$\alpha : I \otimes_R I^\vee \to F \otimes_R (I \otimes_R I^\vee)$，$\alpha(x) = 1 \otimes x$ $(x \in I \otimes_R I^\vee)$ とする．このとき，次の可換図式

$$\begin{tikzcd}
F \otimes_R (I \otimes_R I^\vee) \arrow[r, equal] & (F \otimes_R I) \otimes_F \mathrm{Hom}_F(F \otimes_R I, F \otimes_R \mathrm{K}_R) \arrow[r, equal] & F \otimes_F \mathrm{Hom}_F(F, F) \arrow[r, equal] & F \\
I \otimes_R I^\vee \arrow[u, "\alpha"] \arrow[rr, "t"] & & \mathrm{K}_R \arrow[u, "\iota"'] &
\end{tikzcd}$$

（$\iota : \mathrm{K}_R \to F$ は埋め込みを表す）から，等式

$$\mathrm{Ker}\ \alpha = \mathrm{Ker}\ t$$

が従う．ゆえに，R-加群 $I \otimes_R I^\vee$ の捩れ部分 $\mathrm{T}(I \otimes_R I^\vee)$ は

$$\mathrm{T}(I \otimes_R I^\vee) = \mathrm{Ker}\ t$$

であって，次が正しい．

補題 2.1. R-加群 $I \otimes_R I^\vee$ が *torsionfree* であるための必要十分条件は，写像 $t : I \otimes_R I^\vee \longrightarrow \mathrm{K}_R$ が単射であることである．

$\mathfrak{a} = \mathrm{Im}\ (I \otimes_R I^\vee \xrightarrow{t} \mathrm{K}_R)$，$J = \mathrm{K}_R : I$ とおく．したがって，$\mathfrak{a} = IJ \in \mathcal{F}$ である．$T = \mathrm{T}(I \otimes_R I^\vee)$ とし，R-加群 M に対し $[M]^\vee = \mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{K}_R)$ とおく．すると，$\ell_R(T) < \infty$ より，$T^\vee = (0)$ となる．ゆえに，$\mathfrak{a}^\vee = (I \otimes_R I^\vee)^\vee$ であるから，自然な完全列

$$0 \longrightarrow T \xrightarrow{\iota} I \otimes_R I^\vee \xrightarrow{t} \mathfrak{a} \longrightarrow 0,$$

の K_R-双対を取ることによって，等式

$$\mathrm{K}_R : \mathfrak{a} = \mathfrak{a}^\vee = (I \otimes_R I^\vee)^\vee = \mathrm{Hom}_R(I, I^{\vee\vee}) = I : I$$

が得られる．$B = I : I$ は R と $\overline{R}$ の間の中間環であり，有限生成 R-加群である．

さて，R と B の任意の中間環 $R \subseteq S \subseteq B$ をとり，$\mathrm{K}_S = \mathrm{K}_R : S$ とおく．I は環 S の分数イデアルでもある．一方で，$\mathfrak{a} = \mathrm{K}_R : (\mathrm{K}_R : \mathfrak{a})$ である ([9, Definition 2.4]) ので，$\mathrm{K}_R : \mathfrak{a} = B$ より，

$$\mathfrak{a} = \mathrm{K}_R : (\mathrm{K}_R : \mathfrak{a}) = \mathrm{K}_R : B = \mathrm{K}_B \subseteq \mathrm{K}_R : S = \mathrm{K}_S,$$
$$\mathrm{K}_S : I = (\mathrm{K}_R : S) : I = \mathrm{K}_R : IS = \mathrm{K}_R : I$$

が従う．ゆえに，R-加群として

$$\mathrm{Hom}_S(I, \mathrm{K}_S) \cong \mathrm{Hom}_R(I, \mathrm{K}_R)$$

である．

次に，可換図式

$$\begin{tikzcd} 0 & & \\ I \otimes_S \mathrm{Hom}_S(I, \mathrm{K}_S) \arrow[u] \arrow[r, "t_S"] & \mathrm{K}_S & \\ I \otimes_R I^\vee \arrow[u, "\rho"] \arrow[r, "t"] & \mathfrak{a} \arrow[u, "\iota"] \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

を考えよう．ここで，$\iota : \mathfrak{a} \to \mathrm{K}_S$ は埋め込みを表し，

$$\rho : I \otimes_R I^\vee \to I \otimes_S \mathrm{Hom}_S(I, \mathrm{K}_S)$$

は，$\rho(x \otimes f) = x \otimes f \ (x \in I, f \in I^\vee)$ で定まる R-線型写像である．このとき，もし $I \otimes_R I^\vee$ が torsionfree なら，補題 2.1 より写像 $t : I \otimes_R I^\vee \to \mathfrak{a}$ は全単射であるから，写像 $\rho : I \otimes_R I^\vee \to I \otimes_S \mathrm{Hom}_S(I, \mathrm{K}_S)$ も全単射であることが従い，写像 $t_S : I \otimes_S \mathrm{Hom}_S(I, \mathrm{K}_S) \to \mathrm{K}_S$ は単射となり，S-加群 $I \otimes_S \mathrm{Hom}_S(I, \mathrm{K}_S)$ も torsionfree であることがわかる．すなわち，次の補題 2.2 が得られる．

補題 2.2. $I \otimes_R I^\vee$ は *torsionfree* と仮定しよう．このとき，$I \otimes_S \mathrm{Hom}_S(I, \mathrm{K}_S)$ は *torsionfree* S-加群であって，自然な射

$$\rho : I \otimes_R I^\vee \to I \otimes_S \mathrm{Hom}_S(I, \mathrm{K}_S)$$

は全単射である．とくに，$S = B$ ととれば，射

$$t_B : I \otimes_B \mathrm{Hom}_B(I, \mathrm{K}_B) \to \mathrm{K}_B, \quad x \otimes f \mapsto f(x)$$

は B-加群の同型写像となる．

次の命題 2.3 が本論文内の議論の鍵である．

命題 2.3 (**環の取り替え**)**.** $I \otimes_R I^\vee$ は *torsionfree* とし，ある中間環 $R \subseteq S \subseteq B$ について，S-加群として $I \cong S$ または $I \cong \mathrm{K}_S$ が成り立つと仮定する．このとき，R-加群としても $I \cong R$ または $I \cong \mathrm{K}_R$ である．

証明. S-加群として $I \cong S$ と仮定する．R-加群としては

$$I \otimes_R \mathrm{Hom}_R(I, \mathrm{K}_R) \overset{\rho}{\cong} I \otimes_S \mathrm{Hom}_S(I, \mathrm{K}_S) \cong \mathrm{Hom}_S(I, \mathrm{K}_S) \cong \mathrm{Hom}_R(I, \mathrm{K}_R)$$

であるから，

$$\mu_R(I) {\cdot} \mu_R(\mathrm{Hom}_R(I, \mathrm{K}_R)) = \mu_R(\mathrm{Hom}_R(I, \mathrm{K}_R))$$

となり，$\mu_R(I) = 1$ が従い，R-加群として $I \cong R$ であることがわかる．

S-加群として $I \cong \mathrm{K}_S$ なら，$S \cong \mathrm{Hom}_S(\mathrm{K}_S, \mathrm{K}_S)$ である ([9, Bemerkung 2.5]) から，R-加群の同型

$$I \otimes_R \mathrm{Hom}_R(I, \mathrm{K}_R) \overset{\rho}{\cong} I \otimes_S \mathrm{Hom}_S(I, \mathrm{K}_S) \cong I$$

を得る．ゆえに，$\mu_R(\mathrm{Hom}_R(I, \mathrm{K}_R)) = 1$ である．

$$I \cong \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(I, \mathrm{K}_R), \mathrm{K}_R)$$

([9, Definition 2.4]) に注意すれば，R-加群として $I \cong \mathrm{K}_R$ であることが従う． □

系 2.4. I は R の $\mathfrak{m}$-準素イデアルであって，ある $a \in I$ に対し等式 $I^2 = aI$ が成り立つと仮定する（環 R の剰余体 $R/\mathfrak{m}$ が無限なら，このような元 $a \in I$ が常に存在することが知られている）．このとき，$I \otimes_R I^\vee$ が *torsionfree* なら，$I = aR$ である．

証明. $I^2 = aI$ なので，$a^{-1}I \subseteq I : I = B$ となる．ゆえに，$I = aB$ であって，B-加群として $I \cong B$ であることが従う．$I \otimes_R I^\vee \overset{\rho}{\cong} I \otimes_B \mathrm{Hom}_B(I, \mathrm{K}_B) \cong \mathrm{Hom}_B(I, \mathrm{K}_B) \cong I^\vee$ であるので，命題 2.3 の証明より，R-加群として $I \cong R$ となる．ゆえに，$B = R$ であるから，等式 $I = aR$ が従う． □

3 定理 1.4 の証明

定理 1.4 を証明しよう．第 2 節の設定と記号を保つ．次の定理 3.1 から始める．

定理 3.1. $(R,\mathfrak{m})$ は 1 次元 *Cohen-Macaulay* 局所環で，正準イデアル K_R を持つとし，$\mathrm{e}(R) \le 4$ と仮定する．ただし，$\mathrm{e}(R)$ は極大イデアル $\mathfrak{m}$ に関する環 R の重複度を表す．I は R の忠実分数イデアルとする．このとき，$I \otimes_R I^\vee$ が *torsionfree* なら，R-加群として $I \cong R$ または $I \cong \mathrm{K_R}$ である．

証明. 剰余体を拡大し，さらに基礎環の完備化を通して，一般性を失うことなく，環 R は $\mathfrak{m}$-進位相について完備であり，剰余体は無限であると仮定することができる．さて，$B = I : I$ とおく．B は有限生成 R-加群で R が完備であるので，環 B は局所環の直積

$$B \cong \prod_{\mathfrak{n} \in \operatorname{Max} B} B_\mathfrak{n}$$

に分解する．ここで，$\operatorname{Max} B$ は B の極大イデアル全体のなす集合である．$I \otimes_B \mathrm{Hom}_B(I, \mathrm{K}_B) \cong \mathrm{K}_B$（補題 2.2）であり，任意の $\mathfrak{n} \in \operatorname{Max} B$ に対して $[\mathrm{K}_B]_\mathfrak{n} = \mathrm{K}_{B_\mathfrak{n}}$ ([9, Satz 5.22]) であるから，$B_\mathfrak{n}$-加群の同型

$$(\sharp) \qquad I_\mathfrak{n} \otimes_{B_\mathfrak{n}} \mathrm{Hom}_{B_\mathfrak{n}}(I_\mathfrak{n}, \mathrm{K}_{B_\mathfrak{n}}) \cong \mathrm{K}_{B_\mathfrak{n}}$$

が得られる．一方で，環 R の剰余体は無限体であるから，$\mathfrak{m}^{n+1} = f\mathfrak{m}^n$ を満たす $f \in \mathfrak{m}$，$n \ge 0$ が存在する．$Q = fR$ とおく．Q は極大イデアル $\mathfrak{m}$ の節減であるから

$$4 \ge \mathrm{e}(R) = \mathrm{e}_Q^0(R) = \mathrm{e}_Q^0(B) = \ell_R(B/fB)$$

となる．ここで，$\mathrm{e}_Q^0(M)$ は有限生成 R-加群 M の環 R の巴系イデアル Q に関する重複度を表す．ゆえに，

$$\begin{aligned} \ell_R(B/fB) &= \sum_{\mathfrak{n} \in \operatorname{Max} B} \ell_R(B_\mathfrak{n}/fB_\mathfrak{n}) \\ &\ge \sum_{\mathfrak{n} \in \operatorname{Max} B} \ell_{B_\mathfrak{n}}(B_\mathfrak{n}/fB_\mathfrak{n}) \\ &\ge \sum_{\mathfrak{n} \in \operatorname{Max} B} \mathrm{e}(B_\mathfrak{n}) \end{aligned}$$

であるので，任意の $\mathfrak{n} \in \operatorname{Max} B$ に対し $\mathrm{e}(B_\mathfrak{n}) \le 4$ であることが従う．一方で，もし局所環 $B_\mathfrak{n}$ が離散的付値環でないなら，

$$\mu_{B_\mathfrak{n}}(\mathrm{K}_{B_\mathfrak{n}}) \le \mathrm{e}(B_\mathfrak{n}) - 1$$

([9, Bemerkung 1.21]) である．ゆえに，$\mu_{B_\mathfrak{n}}(\mathrm{K}_{B_\mathfrak{n}}) \le 3$ であり，しかも上の同型 $(\sharp)$ から

$$\mu_{B_\mathfrak{n}}(I_\mathfrak{n}) \cdot \mu_{B_\mathfrak{n}}(\mathrm{Hom}_{B_\mathfrak{n}}(I_\mathfrak{n}, \mathrm{K}_{B_\mathfrak{n}})) = \mu_{B_\mathfrak{n}}(\mathrm{K}_{B_\mathfrak{n}})$$

であるので，

$$\mu_{B_\mathfrak{n}}(I_\mathfrak{n}) = 1 \quad \text{または} \quad \mu_{B_\mathfrak{n}}(\mathrm{Hom}_{B_\mathfrak{n}}(I_\mathfrak{n}, \mathrm{K}_{B_\mathfrak{n}})) = 1$$

であることが直ちに従う．すなわち，任意の $\mathfrak{n} \in \operatorname{Max} B$ に対し

$$I_\mathfrak{n} \cong B_\mathfrak{n} \quad \text{であるかまたは} \quad I_\mathfrak{n} \cong \mathrm{K}_{B_\mathfrak{n}}$$

である．ゆえに，次を示しさえすれば，命題 2.3 より定理 3.1 の証明が完成するであろう．

Claim 1. 次のどちらかが成り立つ．

(1) 任意の $\mathfrak{n} \in \operatorname{Max} B$ に対し $I_\mathfrak{n} \cong B_\mathfrak{n}$ である．したがって，B-加群として $I \cong B$ である．

(2) 任意の $\mathfrak{n} \in \operatorname{Max} B$ に対し $I_\mathfrak{n} \cong \mathrm{K}_{B_\mathfrak{n}}$ である．したがって，B-加群として $I \cong \mathrm{K}_B$ である．

Claim 1 の証明. (1) と (2) のどちらも成立しないと仮定してみよう．ゆえに，B は局所環でなく，もちろん Gorenstein でもない．そこでまず，$B_{\mathfrak{n}_1}$ が Gorenstein 環でないような $\mathfrak{n}_1 \in \operatorname{Max} B$ を取る．すると $\mathrm{e}(B_{\mathfrak{n}_1}) \ge 3$ である．一方で，B は局所環ではないから，$\mathfrak{n}_2 \ne \mathfrak{n}_1$ である $\mathfrak{n}_2 \in \operatorname{Max} B$ が存在している．このとき

$$4 \ge \sum_{\mathfrak{n} \in \operatorname{Max} B} \mathrm{e}(B_\mathfrak{n}) \ge \mathrm{e}(B_{\mathfrak{n}_1}) + \mathrm{e}(B_{\mathfrak{n}_2}) \ge 4$$

であるので，$\operatorname{Max} B = \{\mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_2\}$，$\mathrm{e}(B_{\mathfrak{n}_1}) = 3$，$\mathrm{e}(B_{\mathfrak{n}_2}) = 1$ となる．もちろん $B_{\mathfrak{n}_2}$ は Gorenstein 環なので，$I_{\mathfrak{n}_2} \cong B_{\mathfrak{n}_2} \cong \mathrm{K}_{B_{\mathfrak{n}_2}}$ である．したがって，もしも $I_{\mathfrak{n}_1} \cong B_{\mathfrak{n}_1}$ なら，任意の $\mathfrak{n} \in \operatorname{Max} B$ について $I_\mathfrak{n} \cong B_\mathfrak{n}$ であり，もしも $I_{\mathfrak{n}_1} \cong \mathrm{K}_{B_{\mathfrak{n}_1}}$ なら，任意の $\mathfrak{n} \in \operatorname{Max} B$ について $I_\mathfrak{n} \cong \mathrm{K}_{B_\mathfrak{n}}$ となるが，不可能である． □

系 3.2. $(R,\mathfrak{m})$ は 1 次元 *Cohen-Macaulay* 局所環で，正準イデアル K_R を持つと仮定し，さらに $\mathfrak{m}\overline{R} \subseteq R$ と仮定する．ここで，$\overline{R}$ は R の全商環 $\mathrm{Q}(R)$ 内での整閉包を表す．I は R の忠実な分数イデアルとする．このとき，もしも $I \otimes_R I^\vee$ が *torsionfree* なら，R-加群として $I \cong R$ または $I \cong \mathrm{K_R}$ である．

証明． R の剰余体は無限体としてよい．$\overline{R}$ は有限生成 R-加群であるので，R の $\mathfrak{m}$-進位相に関する完備化 $\widehat{R}$ は reduced である．$I \subsetneq R$ と仮定してよい．元 $f \in \mathfrak{m}$ と $g \in I$ を，それぞれ $\mathfrak{m}\overline{R} = f\overline{R}$，$I\overline{R} = g\overline{R}$ が成り立つように選ぶ（$\overline{R}$ は単項イデアル環であり，R の剰余体は無限体であるので，このような元 f, g を選ぶことは可能である）． すると，g は $\mathrm{Q}(R)$ の単元であるから，$fR \subseteq \frac{f}{g}I \subseteq f\overline{R} = \mathfrak{m}\overline{R}$ となる．ゆえに，I を $\frac{f}{g}I$ で置き換えて，一般性を失うことなく

$$fR \subseteq I \subseteq \mathfrak{m}\overline{R} \subsetneq R$$

となっていると仮定することができる．すると，$\mathfrak{m} = \mathfrak{m}\overline{R} = f\overline{R}$ であるから，$\mathfrak{m}^2 = f\mathfrak{m}$ である．

さて，$S = R/I$，$\mathfrak{n} = \mathfrak{m}/I$ とおく．$\mathfrak{m}^2 = f\mathfrak{m} \subseteq I$ であるから，$\mathfrak{n}^2 = (0)$ である．ゆえに，

$$\ell_S((0) :_S \mathfrak{n}) \geq \mu_S(\mathfrak{n}) \geq \mu_R(\mathfrak{m}) - r$$

が従う．ただし，$r = \mu_R(I)$ である．一方で，短完全列

$$0 \to I \to R \to S \to 0$$

の K_R-双対をとることにより， 全射

$$I^\vee \to \mathrm{Ext}^1_R(S, \mathrm{K}_R) \to 0$$

が得られるから，

$$s \geq \mu_R(\mathrm{Ext}^1_R(S, \mathrm{K}_R)) = \ell_S((0) :_S \mathfrak{n})$$

([9, Satz 6.10]) である．ただし，$s = \mu_R(I^\vee)$ とする．一方で，$\mu_R(\mathfrak{m}) = \mathrm{e}(R)$（[13, Theorem 1]）であるから，

$$\mathrm{e}(R) \geq \mu_R(\mathfrak{a}) = rs$$

([14, Chapter 3, 1.1. Theorem]) が従い．ゆえに

$$s \geq \ell_S((0) :_S \mathfrak{n}) \geq \mu_R(\mathfrak{m}) - r = \mathrm{e}(R) - r \geq rs - r$$

となり，$1 \geq (r-1)(s-1)$ が従う．もしも $r, s \geq 2$ なら，$r = s = 2$ であって，

$$2 \geq \mathrm{e}(R) - 2$$

となり，$\mathrm{e}(R) \leq 4$ が得られるが，これは定理 3.1 に反する．よって，$r = 1$ または $s = 1$ であり，R-加群として $I \cong R$ または $I \cong \mathrm{K}_R$ であることが従う． □

定理 1.4 から直ちに次が従う．

系 3.3 (cf. [7, (3.2) Theorem])**．** R は 1 次元 *Gorenstein* 局所環で，$\mathrm{e}(R) \leq 4$ と仮定する．I は R の忠実イデアルとする．$I \otimes_R \mathrm{Hom}_R(I, R)$ が *torsionfree* なら，I は単項イデアルである．

次の環 R は 1 次元 Cohen-Macaulay 局所環であって，$\mathfrak{m}\overline{R} \subseteq R$ という条件を満たしている．

系 3.4. $(S, \mathfrak{n})$ は正則局所環で $n = \dim S > 0$ とする．$x_1, x_2, \ldots, x_n$ は S の正則巴系とし，各 $1 \leq i \leq n$ に対し

$$\mathfrak{p}_i = (x_j \mid 1 \leq j \leq n, j \neq i)$$

とおき，$R = S/\bigcap_{i=1}^n \mathfrak{p}_i$. とする．$I$ が R の忠実イデアルで $I \otimes_R \mathrm{Hom}_R(I, \mathrm{K}_R)$ が *torsionfree* なら，R-加群として $I \cong R$ または $I \cong \mathrm{K}_R$ である．

数値半群環の場合を考えよう．

定理 3.5. $R = k[[t^a, t^{a+1}, \ldots, t^{2a-1}]]$ $(a \geq 1)$ は数値半群 $H = \langle a, a+1, \ldots, 2a-1 \rangle$ の体 k 上の半群環とする．ここで t は不定元である．$I \neq (0)$ は R のイデアルとする．もしも $I \otimes_R I^\vee$ が *torsionfree* なら，R-加群として $I \cong R$ または $I \cong \mathrm{K}_R$ である．

証明． $\overline{R} = k[[t]]$ であって $\mathfrak{m}k[[t]] = \mathfrak{m}$ である． □

系 3.6. $R = k[[t^a, t^{a+1}, \ldots, t^{2a-2}]]$ $(a \geq 3)$ は，数値半群 $H = \langle a, a+1, \ldots, 2a-2 \rangle$ の体 k 上の半群環とし，I は R のイデアルとする．$I \otimes_R \mathrm{Hom}_R(I, R)$ が *torsionfree* なら，I は単項イデアルである．

証明． R は Gorenstein 環であって，$R : \mathfrak{m} = R + kt^{2a-1}$ である．$\mu_R(I) > 1$ と仮定し，環 $B = I : I$ を考えよう．$I \otimes_B \mathrm{Hom}_B(I, \mathrm{K}_B) \cong \mathrm{K}_B$（補題 2.2）であるから，$R \subsetneq B$ である．ゆえに，$t^{2a-1} \in B$ となり，

$$R \subseteq S = k[[t^a, t^{a+1}, \ldots, t^{2a-1}]] \subseteq B$$

が得られる．したがって，補題 2.2 より，S-加群 $I \otimes_S \mathrm{Hom}_S(I, \mathrm{K}_S)$ は torsionfree である．定理 3.5 が示すように S-加群として $I \cong S$ または $I \cong \mathrm{K}_S$ であるから，命題 2.3 から $I \cong R$ のはずであるが，もちろんあり得ない． □

注意 3.7. 系 3.6 は予想 1.2 が正しいような 1 次元 *Gorenstein* 局所整域の新しいクラスを提示している．例えば，系 3.6 において $a = 5$ と取れば，$R = k[[t^5, t^6, t^7, t^8]]$ は *Gorenstein* 局所整域であるが，完全交差ではない．実際，$P = k[[X, Y, Z, W]]$ は体 k 上の形式的冪級数環とし，$\varphi : U \to k[[t]]$ を

$$\varphi(X) = t^5,\ \varphi(Y) = t^6,\ \varphi(Z) = t^7,\ \varphi(W) = t^8$$

で定まる k-代数の射とすると，

$$\mathrm{Ker}\ \varphi = (Y^2 - XZ, Z^2 - YW, W^2 - X^2Y, X^3 - ZW, XW - YZ)$$

であり，$\mu_P(\mathrm{Ker}\ \varphi) = 5$ である．

高次元の場合について少し触れて，本節を締めくくりたいと思う．

系 3.8. R は *Cohen-Macaulay* 局所環で $\dim R \geq 1$ とする．$\dim R_\mathfrak{p} = 1$ なる任意の $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ に対し，局所化 $R_\mathfrak{p}$ は *Gorenstein* 環であってさらに $\mathrm{e}(R_\mathfrak{p}) \leq 4$ であると仮定する．I は R の忠実イデアルとする．このとき，$I \otimes_R \mathrm{Hom}_R(I, R)$ が反射的なら，I は単項イデアルである．

証明. I は単項イデアルでないとし，反例を与える環 R を，その次元 $d = \dim R$ が反例中で最小になるようにとる．すると，系 3.3 より，$d \geq 2$ である．$\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ を $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}$ と取る．すると，$I_\mathfrak{p}$ は $R_\mathfrak{p}$ の忠実イデアルであって，$R_\mathfrak{p}$-加群 $I_\mathfrak{p} \otimes_{R_\mathfrak{p}} \mathrm{Hom}_{R_\mathfrak{p}}(I_\mathfrak{p}, R_\mathfrak{p}) = [I \otimes_R \mathrm{Hom}_R(I, R)]_\mathfrak{p}$ は反射的であるので，$d = \dim R$ の取り方（最小性）から，$I_\mathfrak{p} \cong R_\mathfrak{p}$ となる．ゆえに，[3, Theorem 3.4] から I は自由 R-加群であるが，不可能である． $\square$

4 数値半群環と単項式イデアル

以下，数値半群環に焦点を絞って議論を展開したい．

設定 4.1. $0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_\ell$ は $\gcd(a_1, a_2, \ldots, a_\ell) = 1$ の整数とする．

$$H = \langle a_1, a_2, \ldots, a_\ell \rangle = \{\sum_{i=1}^{\ell} c_i a_i \mid 0 \leq c_i \in \mathbb{Z}\}$$

とおき，

$$R = k[[t^{a_1}, t^{a_2}, \ldots, t^{a_\ell}]] \quad \subseteq \quad k[[t]]$$

とする．ただし，$V = k[[t]]$ は体 k 上の形式的冪級数環である．$\mathfrak{m} = (t^{a_1}, t^{a_2}, \ldots, t^{a_\ell})$ とおく．すなわち，$\mathfrak{m}$ は環 R の極大イデアルである．$\mathfrak{c} = R : V$，$c = \mathrm{c}(H)$（H の conductor）とすると，$\mathfrak{c} = t^c V$ となる．$a = c - 1$ とおく．$\mathcal{F}$ は R の (0) でない分数イデアル全体の集合とする．

R は 1 次元 Cohen-Macaulay 局所整域で，V はその正規化である．また，$\mathrm{e}(R) = a_1 = \mu_R(V)$ である．

定義 4.2. $I \in \mathcal{F}$ とする．I が単項式イデアルであるとは，等式 $I = \sum_{n \in \Lambda} Rt^n$ が成り立つような集合 $\Lambda \subseteq \mathbb{Z}$ が存在することをいう．

$\mathcal{M}$ によって，単項式イデアル $I \in \mathcal{F}$ の全体よりなる集合を表す．任意の $I, J \in \mathcal{M}$ に対し

$$I + J, IJ, I \cap J, I : J \in \mathcal{M}$$

である．与えられた $I \in \mathcal{M}$ に対し，$\mathbb{Z}$ の有限部分集合 Λ を，$\{t^n\}_{n \in \Lambda}$ が I の極小生成系となるように選ぶことができる．そのような部分集合 $\Lambda \subseteq \mathbb{Z}$ は，I に対し一意的に定まる．以下，単項式イデアル I について，予想 1.3 を考察したいと考えるが，そのためには，I の代わりに単項式イデアル $t^{-d}I$（$d = \min \Lambda$）を考えることにより，一般性を失うことなく $R \subseteq I \subseteq V$ と仮定してよい．思い出しておきたいことは，

$$\mathrm{K}_R = \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus H} Rt^{a-n}$$

（[5, Example (2.1.9)]）である．ゆえに，$\mathrm{K}_R \in \mathcal{M}$，$R \subseteq \mathrm{K}_R \subseteq V$ である．また，$n \in \mathbb{Z}$ とすると，$a - n \notin H$ であるための必要十分条件は，$t^n \in \mathrm{K}_R$ となる．

以下，$e = a_1 \geq 2$ と仮定しよう．各 $0 \leq i \leq e - 1$ に対し

$$\alpha_i = \max\{n \in \mathbb{Z} \setminus H \mid n \equiv i \bmod e\}$$

とおき，$\mathcal{S} = \{\alpha_i \mid 1 \leq i \leq e - 1\}$ と定める．ゆえに，$\alpha_0 = -e$，$\sharp\mathcal{S} = e - 1$，$a = \max \mathcal{S}$ であり，$1 \leq \forall i \leq e - 1$ について $\alpha_i \geq i$ である．

事実 4.3. 次が正しい．

(1) $\mathrm{K}_R = \sum_{s \in \mathcal{S}} Rt^{a-s}$.

(2) 集合 $\{t^{a-s} \mid s \in S \ s.t.\ \mathfrak{m}t^s \subseteq R\}$ は，K_R の極小生成系をなす．

$I \in \mathcal{M}$（$R \subseteq I \subseteq V$）を取り，$J = \mathrm{K}_R : I$ ($\cong I^\vee$) とおく．$J \in \mathcal{M}$，$J \subseteq \mathrm{K}_R \subseteq V$ である．暫くの間（系 4.5 まで），自然な射

$$t : I \otimes_R I^\vee \to \mathrm{K}_R$$

は全単射であると仮定する．このとき，$1 \in \mathrm{K}_R = IJ$ より $1 \in J$ が従うが，$R \subseteq J \subseteq \mathrm{K}_R$ より $R \subseteq I \subseteq \mathrm{K}_R$ となる．$\mu_R(I) = r+1$, $\mu_R(J) = s+1$ $(r, s \geq 0)$ とおき，

$$I = (t^{c_0}, t^{c_1}, \cdots, t^{c_r}), \quad J = (t^{d_0}, t^{d_1}, \cdots, t^{d_s})$$

と表しておく．ここで，$c_0 = 0 < c_1 < \cdots < c_r$, $d_0 = 0 < d_1 < \cdots < d_s$ は整数である．ゆえに，

$$\mathrm{K}_R = (t^{c_i + d_j} \mid 0 \leq i \leq r,\ 0 \leq j \leq s)$$

であり，$\{t^{c_i+d_j}\}_{0 \leq i \leq r,\ 0 \leq j \leq s}$ は K_R の極小生成系をなす．したがって，$r, s > 0$ のなら，$t^{c_r + d_s} \notin I \cup J$ である．

$b = \min \mathcal{S}$ とおく．すぐわかるように，$a_2 \notin \mathbb{Z}a_1$ なら，$b = a_2 - a_1$ となる．

定理 4.4. $t^b \in R : \mathfrak{m}$ なら，R-加群として $I \cong R$ または $I \cong \mathrm{K}_R$ である．

証明. $r, s > 0$ と仮定し，矛盾を導こう．$t^{c_r + d_s} \notin I = \mathrm{K}_R : J$ であるので，$t^{c_r+d_s} J \not\subseteq \mathrm{K}_R$ である．$1 \leq j \leq s$ を $t^{c_r + d_s + d_j} \notin \mathrm{K}_R$ を満たすように選ぶと，$a - (c_r + d_s + d_j) \in H$ となる．同様に，$a - (c_r + d_s + c_i) \in H$ となる整数 $1 \leq i \leq r$ が存在する．与えられた単項式イデアルについて，その極小生成系 $\{t^n\}_{n \in \Lambda}$ は一意的であるので，事実 4.3 より，集合 $\{c_i + d_j \mid 0 \leq i \leq r,\ 0 \leq j \leq s\}$ は集合 $\{a - s \mid s \in \mathcal{S}\}$ に含まれる．さらに，$t^b \in R : \mathfrak{m}$ であって $t^b \notin R$ であるので，t^{a-b} は K_R の極小生成系の一部をなす．すなわち，$b = \min \mathcal{S}$ であるから，$a - b = c_r + d_s$ である．ゆえに，$b - c_i, b - d_j \in H$ が得られる．$\alpha = b - c_i$, $\beta = b - d_j$ とおく．

$1 \leq k \leq e-1$ について $\alpha \equiv \alpha_k \bmod e$ ならば，$\alpha \in H$ で $\alpha_k \notin H$ であるから，$\alpha = \alpha_k + en (n \geq 1)$ となるが，$b = \min \mathcal{S}$ より，$a \leq \alpha_k < \alpha = b - c_i$ であるので，不可能である．よって，$\alpha \equiv 0 \bmod e$ であることがわかる．同様に，$\beta \equiv 0 \bmod e$ が得られて，$c_i \equiv d_j \bmod e$ が従う．しかしながら，$\{t^{c_i}, t^{d_j}\}$ は K_R の極小生成系の一部であるので，こういうことはあり得ない．ゆえに，$r = 0$ か $s = 0$ であり，R-加群として $I \cong R$ または $I \cong \mathrm{K}_R$ である．□

系 4.5. $\mu_R(\mathfrak{m}) = e$ なら，R-加群として $I \cong R$ または $I \cong \mathrm{K}_R$ である．

証明. $\mathfrak{m}t^b \subseteq R$ を示せば十分である．$f = t^e$ とおく．$\mathfrak{m}^2 = f\mathfrak{m}$ （[13, Theorem 1]）より，$fR : \mathfrak{m} = \mathfrak{m}$ である．$e = \ell_R(R/fR)$ であるので，

$$\mu_R(\mathrm{K}_R) = \ell_R((fR : \mathfrak{m})/fR) = \ell_R(\mathfrak{m}/fR) = \ell_R(R/fR) - 1 = e - 1$$

([9, Lemma 3.1]) となる．$\sharp\mathcal{S} = e - 1$ であるから，事実 4.3 より，$\{t^{a-s}\}_{s \in \mathcal{S}}$ は K_R の極小生成系であって，$\mathfrak{m}t^b \subseteq R$ が従う．□

次の例が示すように，$t^b \in R : \mathfrak{m}$ であるからといって，$\mu_R(\mathfrak{m}) = e$ とは限らない．

注意 4.6. $H = \langle 7, 22, 23, 38, 40 \rangle$ とおく．$\mathcal{S} = \{15, 16, 18, 33, 41\}$ である．$a = 41, b = 15$，$\mathfrak{m}{\cdot}t^{15} \subseteq R$ であるが，$\mu_R(\mathfrak{m}) = 6 < e = 7$ である．

さて，$\mathrm{e}(R) \leq 5$ の場合を証明しよう．

定理 4.7. I は，$a_1 \leq 5$ の数値半群環 $R = k[[t^{a_1}, t^{a_2}, \cdots, t^{a_\ell}]]$ 内の単項式イデアルとする．このとき，$I \otimes_R \mathrm{Hom}_R(I, \mathrm{K}_R)$ が *torsionfree* なら，R-加群として $I \cong R$ または $I \cong \mathrm{K}_R$ である．

証明. $e = a_1 > 1$，$R \subseteq I \subseteq V$ としてよい．$B = I : I$ を考える．B も体 k 上の数値半群環であって，

$$\mathrm{e}(B) = \mu_B(V) \leq \mu_R(V) = \mathrm{e}(R) = e \leq 5$$

である．ゆえに，命題 2.3 と定理 3.1 より，$\mathrm{e}(B) = 5$ としてよいことが分かる．もちろん $e = 5$ である．

$$\mu_B(\mathrm{K}_B) \leq \mathrm{e}(B) - 1 = 4$$

（[9, Bemerkung 1.21]）であって，補題 2.2 より

$$\mu_B(I){\cdot}\mu_B(\mathrm{Hom}_B(I, \mathrm{K}_B)) = \mu_B(\mathrm{K}_B),$$

であるから，$\mu_B(\mathrm{K}_B) = 4$ の場合に帰着される．このとき，B は極大埋め込み次元を持つ ([13])．実際，$f = t^5$ とおき，B の極大イデアルを $\mathfrak{n}$ とすると，$\mathfrak{n} \neq fB$ であるから，

$$\mu_B(\mathrm{K}_B) = \ell_B([fB : \mathfrak{n}]/fB) \leq \ell_B(\mathfrak{n}/fB) = \ell_B(B/fB) - 1 = \mathrm{e}(B) - 1$$

である．したがって

$$\mu_B(\mathrm{K}_B) = \mathrm{e}(B) - 1 = 4$$

であるから，$fB : \mathfrak{n} = \mathfrak{n}$ が得られる．$f \notin \mathfrak{n}^2$ より $\mathfrak{n}^2 = f\mathfrak{n}$ となる．ゆえに，B は極大埋め込み次元を持ち，B-加群として $I \cong B$ または $I \cong \mathrm{K}_B$ である（系 4.5）．したがって，命題 2.3 より，R-加群としても $I \cong R$ または $I \cong \mathrm{K}_R$ であることがわかる． □

5　$\mathrm{e}(R) = 7$ の場合

本節では，数値半群環内の 2 元生成単項式イデアルを考察する．前節の設定 4.1 を保つ．I は R の単項式イデアルで $R \subseteq I \subseteq V$ なるものとする．$J = \mathrm{K}_R : J$ とおき，$\mu_R(I) = \mu_R(J) = 2$ と仮定し，

$$I = (1, t^{c_1})\ (0 < c_1),\ J = (1, t^{c_2})\ (0 < c_2)$$

と表しておく．

定理 5.4 まで，**次の条件 5.1 を仮定する**．射

$$t : I \otimes_R I^\vee \to \mathrm{K}_R$$

が単射なら，基礎環の取り換えの後に，条件 5.1 が満たされることに注意しよう．

条件 5.1. $IJ = \mathrm{K}_R$ かつ $\mu_R(\mathrm{K}_R) = 4$ である．

ゆえに，

$$\mathrm{K}_R = (1, t^{c_1}, t^{c_2}, t^{c_1+c_2})$$

であって，$1, t^{c_1}, t^{c_2}, t^{c_1+c_2}$ は R-加群 K_R の極小生成系を成す．$c_3 = c_1 + c_2$ とおく．$b_1, b_2, b_3 \in \mathcal{S}$ を選んで $c_1 = a - b_1$，$c_2 = a - b_2$，$c_3 = a - b_3$. と表しておく（事実 4.3 参照）．もちろん，$b_3 = b_1 + b_2 - a$ である．

では，次の補題 5.2 から始めよう．

補題 5.2. 次が正しい．

(1) $a = b_1 + b_2 - b_3 \notin H$.

(2) $2b_1 - a = b_1 + b_3 - b_2 \in H$.

(3) $2b_2 - a = b_2 + b_3 - b_1 \in H$.

(4) $b_2 + b_3 - a = 2b_3 - b_1 \in H$.

(5) $b_1 + b_3 - a = 2b_3 - b_2 \in H$.

(6) $2b_2 - b_3 \in H$.

証明. (1) 自明である．

(2)(3) $t^{c_1} \notin J = \mathrm{K}_R : I$ であるから，$t^{c_1} I \not\subseteq \mathrm{K}_R$ である．$t^{2c_1} \notin \mathrm{K}_R$ であるので，事実 4.3 より

$$b_1 + b_3 - b_2 = 2b_1 - a = a - 2c_1 \in H$$

が従う．同様に，$t^{c_2} \notin I$ であるので

$$b_2 + b_3 - b_1 = 2b_2 - a = a - 2c_2 \in H$$

となる．

(4)(5) $t^{c_1+c_2} \notin I = \mathrm{K}_R : J$ であるので，$t^{c_1+2c_2} \notin \mathrm{K}_R$ である．ゆえに，

$$2b_3 - b_1 = b_2 + b_3 - a = a - (c_1 + 2c_2) \in H$$

である．また，$t^{c_1+c_2} \notin J$ より $t^{2c_1+c_2} \notin \mathrm{K}_R$ であるから

$$2b_3 - b_2 = b_1 + b_3 - a = a - (2c_1 + c_2) \in H$$

である．

(6) $c_1 < c_2$ なら，$t^{c_2-c_1} \notin J = (1, t^{c_2})$ である．$t^{c_2-c_1} I \not\subseteq \mathrm{K}_R$ から $t^{c_2-c_1} \notin \mathrm{K}_R$ である．ゆえに，$2b_2 - b_3 = a - (c_2 - c_1) \in H$ となる．$c_1 > c_2$ なら，$2b_2 - b_3 = a - (c_2 - c_1) > a = c - 1$ であるから，$2b_2 - b_3 \in H$ である． □

$I = \mathrm{K}_R : (\mathrm{K}_R : I) = \mathrm{K}_R : J$ であるので，I と J は対称である．したがって，一般性を失うことなく $0 < c_1 < c_2$ と仮定してよい．ゆえに

$$a > b_1 > b_2 > b_3 > 0$$

であって，

$$2b_2 - a,\ b_2 + b_3 - a,\ b_1 + b_3 - a \in H$$

である．

補題 5.3. 次が正しい．

(1) $2b_2 \not\equiv b_1 + b_3 \bmod e$.

(2) $2b_1 \not\equiv b_2 + b_3 \bmod e$.

証明. (1) $2b_2 \equiv b_1+b_3 \bmod e$ と仮定すると，$2b_1-a=b_1+b_3-b_2 \equiv b_2 \bmod e$ である．$b_2 \notin H$ であって $b_1+b_3-b_2 \in H$ であるので，ある $n \geq 1$ があって

$$b_1+b_3-b_2=b_2+en$$

となる．したがって，$b_1+b_3-b_2 > b_2$ であって，$b_1 > 2b_2-b_3$ である．一方で，

$$b_1 \notin H,\ \ 2b_2-b_3 \in H,\ \ 2b_2-b_3 \equiv b_1 \bmod e$$

であるから，$2b_2-b_3 > b_1$ となるが，不可能である．

(2) $2b_1 \equiv b_2+b_3 \bmod e$ と仮定すると，$b_2+b_3-b_1 \equiv b_1 \bmod e$ である．$b_2+b_3-b_1 \in H$ であって $b_1 \notin H$ であるので，$b_2+b_3-b_1 > b_1$ となる．しかし，$b_1 > b_2 > b_2+b_3-b_1$ であるので，不可能である．□

定理 5.4. 条件 5.1 が満たされているなら，$e=a_1 \geq 8$ である．

証明. $4=\mu_R(\mathrm{K}_R) \leq \mathrm{e}(R)-1$ より，$e=\mathrm{e}(R) \geq 5$ である．整数

$$a,\ b_1,\ b_2,\ b_3,\ 2b_2-a,\ b_2+b_3-a,\ b_1+b_3-a,\ 2b_1-a$$

を考える．補題 5.2 と補題 5.3 から

$$2b_2-a=b_2+b_3-b_1,\ b_2+b_3-a,\ b_1+b_3-a \in H$$

であるので，これらの整数は mod e で異なる．さらに，この 3 つの整数は b_3 より小である．ゆえに，7 つの整数

$$a,\ b_1,\ b_2,\ b_3,\ 2b_2-a,\ b_2+b_3-a,\ b_1+b_3-a$$

は，mod e ですべて異なる．したがって，$e \geq 7$ である．

$e=7$ と仮定する．このとき，$2b_2-a \not\equiv 2b_1-a \bmod 7$ である．また，補題5.3 (1) より，$2b_1-a=b_1+b_3-b_2 \not\equiv b_2 \bmod 7$ となる．一方で，補題 5.3 (2) より

$$b_2+b_3-a \ \not\equiv\ 2b_1-a \bmod 7$$

である．すなわち，8 つの整数

$$a,\ b_1,\ b_2,\ b_3,\ 2b_2-a,\ b_2+b_3-a,\ b_1+b_3-a,\ 2b_1-a$$

は，mod 7 ですべて異なるが，不可能である．ゆえに，$e=a_1 \geq 8$ である．□

本節のゴールは次の結果である．

定理 5.5. $R=k[[t^{a_1},t^{a_2},\cdots,t^{a_\ell}]]$ は体 k 上の数値半群環とし，$e=a_1 \leq 7$ と仮定する．I は R の単項式イデアルとする．このとき，$I \otimes_R I^\vee$ が *torsionfree* なら，R-加群として $I \cong R$ または $I \cong \mathrm{K}_R$ である．

証明. 環 $B=I:I$ を通して，自然な射

$$t: I \otimes_R \mathrm{Hom}_R(I,\mathrm{K}_R) \to \mathrm{K}_R$$

は同型であるとしてよい．$I \not\cong R$，$I \not\cong \mathrm{K}_R$ と仮定しよう．

$$4 \leq \mu_R(I){\cdot}\mu_R(\mathrm{Hom}_R(I,\mathrm{K}_R))=\mu_R(\mathrm{K}_R) \leq \mathrm{e}(R)-1 \leq 6$$

であるので，$\mu_R(\mathrm{K}_R)=4$，$\mu_R(I)=\mu_R(\mathrm{K}_R:I)=2$ であるが，定理 5.4 より不可能である．□

系 5.6 ([6, Main Theorem])**.** R は *Gorenstein* 数値半群環で $\mathrm{e}(R) \leq 7$ とし，I は R の単項式イデアルとする．$I \otimes_R \mathrm{Hom}_R(I,R)$ が *torsionfree* なら，I は単項イデアルである．

6　捩れ部分 $\mathrm{T}(I \otimes_R J)$

R は 1 次元 Cohen-Macaulay 局所環とする．$F=\mathrm{Q}(R)$ により R の全商環を表す．I は 2 元生成と仮定して，R の分数イデアル I,J のテンソル積 $I \otimes_R J$ の捻れ部分 $\mathrm{T}(I \otimes_R J)$ を計算する方法を記録したい．

$f \in F$，$f \notin R$ を取り，$I=(1,f)\ (=R+Rf)$ とおく．非零因子 $\rho \in R$ を $\rho I \subseteq R$ を満たすよう選ぶ．$I'=\rho I$，

$$\mathbf{a}=\begin{pmatrix}-f\\1\end{pmatrix} \in F^2 \quad,\quad R:I=\{x \in F \mid xI \subseteq R\}$$

とおく．$R:I$ も R の分数イデアルであり，R-加群として $R:I \cong \mathrm{Hom}_R(I,R)$ である．

R-線型写像 $\varepsilon : R^2 \to I$ を $\varepsilon(\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix})=a+bf$，$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} \in R^2$ によって定める．次が正しい．

事実 6.1. $\mathrm{Ker}\ \varepsilon=\{b\mathbf{a} \mid b \in R:I\} \cong R:I$.

$s=\mu_R(R:I)$ とおき，$R:I=(b_1,b_2,\dots,b_s)$ とする．完全系列

$$R^s \xrightarrow{\mathbb{M}} R^2 \xrightarrow{\tau=\rho[1,f]} R \longrightarrow R/I' \longrightarrow 0$$

を考える．ここで $\mathbb{M}$ は次で定める行列である：

$$\mathbb{M}=\begin{pmatrix} -b_1f & -b_2f & \cdots & -b_sf \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_s \end{pmatrix}.$$

さて，J を R の分数イデアルとすると，鎖状複体

$$\mathcal{C}: \quad J^{\oplus s} \xrightarrow{\mathbb{M}} J^{\oplus 2} \xrightarrow{\rho[1,f]} J$$

のホモロジー $\mathrm{H}(\mathcal{C})=\mathrm{Z}(\mathcal{C})/\mathrm{B}(\mathcal{C})$ が，$\mathrm{Tor}_1^R(R/I',J)$ に他ならない．

$$\mathrm{Z}(\mathcal{C})=\{c\mathbf{a}\mid c\in J:I\}\cong J:I$$

であって

$$\mathrm{B}(\mathcal{C})=\{c\mathbf{a}\mid c\in (R:I)J\}\cong (R:I)J$$

であるから，R-加群の同型

事実 6.2. $\mathrm{Tor}_1^R(R/I',J)\cong (J:I)/(R:I)J$

を得る．

自然な射

$$\xi: J\to R\otimes_R J,\ j\mapsto 1\otimes j,\quad \eta: J^{\oplus 2}\to R^2\otimes_R J,\ \begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}\mapsto \begin{pmatrix} 1\\ 0\end{pmatrix}\otimes x+\begin{pmatrix} 0\\ 1\end{pmatrix}\otimes y$$

と次の可換図式

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 & & & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Tor}_1^R(R/I',J) \arrow[r] & I'\otimes_R J \arrow[u] \arrow[r, "\iota\otimes 1_J"] & R\otimes_R J \arrow[r] & R/I'\otimes_R J \arrow[r] & 0 \\
 & & & J \arrow[u, "\xi"'] & & \\
 & & R^2\otimes_R J \arrow[uu, "\rho\varepsilon\otimes_R 1_J"] \arrow[uur, "\tau\otimes_R 1_J"'] & J^{\oplus 2} \arrow[l, "\eta"'] \arrow[u, "{\rho[1,f]}"'] & & \\
 & & R^s\otimes_R J \arrow[u, "\mathbb{M}\otimes_R 1_J"] & & &
\end{tikzcd}$$

を考えよう．第 1 列は，短完全列

$$0\to I' \xrightarrow{\iota} R\to R/I\to 0$$

から誘導される完全列（ι は埋め込み）である．

$$\mathrm{Tor}_1^R(R/I',J)\cong \mathrm{T}(I'\otimes_R J)$$

であって

$$\eta: J^{\oplus 2}\to R^2\otimes_R J,\ \ c\mathbf{a}\longmapsto \begin{pmatrix} 1\\ 0\end{pmatrix}\otimes(-cf)+\begin{pmatrix} 0\\ 1\end{pmatrix}\otimes c$$

$(c\in J:I)$ であるから，$I\cong I'=\rho I$ より，R-加群の同型

命題 6.3. $(J:I)/(R:I)J\cong \mathrm{T}(I\otimes_R J)$,
$$\overline{c}\longmapsto f\otimes c-1\otimes cf$$

が従う．ここで $\overline{c}$ は，元 $c\in J:I$ の $(J:I)/(R:I)J$ 内での像を表す．

とくに，$J=R:I$ ととれば，次が得られる．

系 6.4. $\mathrm{T}(I\otimes_R(R:I))\cong (R:I)^2/(R:I^2)$.

簡単な具体例を計算してみよう．

例 6.5. $H=\langle 8,11,14,15\rangle$，$R=k[[t^8,t^{11},t^{14},t^{15}]]$ とし，$I=(1,t)$ とおく．このとき

$$R:I=(t^{14},t^{15},t^{24},t^{27})$$

であって，$R:I^2=(t^{14},t^{23},t^{24},t^{26},t^{27})$ である．$(R:I)^2=(t^{28},t^{29},t^{30},t^{38})$ であるから，$t^{14}\notin (R:I)^2$ である．ゆえに，$I\otimes_R(R:I)$ は非自明なねじれ元 $t\otimes t^{14}-1\otimes t^{15}$ を持つ．

証明. $c=22$，$a=21$ である．$R:I=(t^n\mid n\in H$ かつ $n+1\in H)$ であるので，$R:I=(t^{14},t^{15})+\mathfrak{c}$ である．$\mathfrak{c}=(t^n\mid n\geq 22)$ である．一方で，$R:I^2=(t^n\mid n\in H$ かつ $n+1,n+2\in H)$ であるから，$R:I^2=(t^{14})+\mathfrak{c}$ である．ゆえに，$R:I=(t^{14},t^{15},t^{24},t^{27})$，$R:I^2=(t^{14},t^{23},t^{24},t^{26},t^{27})$ である．$t^{14}\notin t^{28}V$，$(R:I)^2\subseteq t^{28}V$ であるから，$(R:I^2)/(R:I)^2\neq(0)$ となり，命題 6.3 より，R-加群 $I\otimes_R(R:I)$ は零でないねじれ元 $t\otimes t^{14}-1\otimes t^{15}$ を持つ． □

7 例

$a_1=8$ のとき，単項イデアルで条件 5.1 を満たすものは数多く存在する．しかしながら，我々が知る限り，それらの単項式イデアル I については，R-加群 $I\otimes_R I^{\vee}$ は torsionfree でない．具体例を解析しよう．

例 7.1. $H=\langle 8,11,14,15\rangle$，$R=k[[t^8,t^{11},t^{14},t^{15}]]$ とする．このとき，$\mathrm{K}_R=(1,t,t^3,t^4)$ である．$I=(1,t)$ とし，$J=\mathrm{K}_R:I$ とおくと $J=(1,t^3)$ となる．しかしながら，$I\otimes_R J$ は torsionfree ではない．実際

$$\mathrm{T}(I\otimes_R J)=R{\cdot}(t\otimes t^{16}-1\otimes t^{17})\cong R/\mathfrak{m}$$

である．

証明. $\mathcal{S}=\{21,20,18,17,7,6,3\}$，

$$\mathrm{K}_R=\sum_{s\in S}Rt^{21-s}=(1,t,t^3,t^4)$$

である．$I=(1,t)$ とする．

$$J=\mathrm{K}_R:I=(t^n\mid n\in\mathbb{Z}\text{ かつ }21-n,20-n\notin H)$$

より，$J=(1,t^3)$ が得られる．ゆえに，

$$IJ=\mathrm{K}_R,\ \mu_R(I)=\mu_R(J)=2,\ \mu_R(\mathrm{K}_R)=4$$

で，条件 5.1 が満たされる． 一方で，

$$R:I=(t^n\mid n\in H\text{ かつ }n+1\in H),$$

$$J:I=(t^n\mid n\in\mathbb{Z}\text{ しかし }21-n,20-n,19-n\notin H)$$

であるから，

$$R:I=(t^{14},t^{15},t^{24},t^{27}),\ J:I=(t^{14},t^{15},t^{16},t^{17},t^{18}),$$

$$(R:I)J=(t^{14},t^{15},t^{17},t^{24},t^{27})$$

となる．したがって，$t^{16}\notin(R:I)J$，$\mathfrak{m}{\cdot}t^{16}\subseteq(R:I)J$ であり，命題 6.2 から

$$\mathrm{T}(I\otimes_R J)\cong(J:I)/(R:I)J=R\overline{t^{16}}\cong R/\mathfrak{m}$$

が得られる．ここで，$\overline{t^{16}}$ は t^{16} の $(J:I)/(R:I)J$ 内での像を表す．ゆえに，$0\neq t\otimes t^{16}-1\otimes t^{17}\in\mathrm{T}(I\otimes_R J)$ であって

$$\ell_R(\mathrm{T}(I\otimes_R J))=1$$

である． □

注意 7.2. 例 7.1 の環 R 内には，単項式イデアル I であって，$I\not\cong R, I\not\cong\mathrm{K}_R$ であるが，$I\otimes_R I^\vee$ が *torsionfree* であるものは存在しない．

以下の例も条件 5.1 を満たすが，$I\otimes_R I^\vee$ は torsionfree ではない．これらの数値半群環内には，$J\otimes_R J^\vee$ が torsionfree であるような単項式イデアル J は，単項イデアルしか含まれていない．

(1) $H=\langle 8,9,10,13\rangle, \mathrm{K}_R=(1,t,t^3,t^4), I=(1,t)$.

(2) $H=\langle 8,11,12,13\rangle, \mathrm{K}_R=(1,t,t^3,t^4), I=(1,t)$.

(3) $H=\langle 8,11,14,23\rangle, \mathrm{K}_R=(1,t^3,t^9,t^{12}), I=(1,t^3)$.

(4) $H=\langle 8,13,17,18\rangle, \mathrm{K}_R=(1,t,t^5,t^6), I=(1,t)$.

(5) $H=\langle 8,13,18,25\rangle, \mathrm{K}_R=(1,t^5,t^7,t^{12}), I=(1,t^5)$.

$a_1\geq 9$ ならば，定理 5.5 は一般には正しくない．本論文の最後に具体例を挙げておく．

例 7.3. $H=\langle 9,10,11,12,15\rangle$，

$$R=k[[t^9,t^{10},t^{11},t^{12},t^{15}]]$$

とする．このとき，$\mathrm{K}_R=(1,t,t^3,t^4)$ である．$I=(1,t)$ とし，$J=\mathrm{K}_R:I$ とおくと $J=(1,t^3)$，$\mu_R(I)=\mu_R(J)=2$，$\mu_R(\mathrm{K}_R)=4$ となる．$R:I=(t^9,t^{10},t^{11})$，$J:I=(t^9,t^{10},t^{11},t^{12},t^{13},t^{14})$，$(R:I)J=J:I$ であるから，命題 6.3 より $I\otimes_R\mathrm{Hom}_R(I,\mathrm{K}_R)$ は torsionfree である．

参考文献

[1] M. Auslander, *Modules over unramified regular local rings*, Illinois J. Math., **5** (1961), 631-647.

[2] P. Constapel, *Vanishing of tor and torsion in tensor products*, Comm. Alg., **24** (1996), 833-846.

[3] O. Celikbas and H. Dao, *Necessary conditions for the depth formula over Cohen-Macaulay local rings*, arXiv:1008.2573.

[4] P. A. García-Sánchez and M. J. Leamer, *Huneke-Wiegand conjecture for complete intersection numerical semigroup rings*, to be published.

[5] S. Goto and K.-i. Watanabe, *On graded rings*, I, J. Math. Soc. Japan, **309** (1978), 179–213.

[6] K. Herzinger, *Torsion in the tensor product of an ideal with its inverse*, Comm. Alg., **24** (1996), 3065–3083.

[7] K. Herzinger, *The number of generators for an ideal and its dual in a numerical semigroup*, Comm. Alg., **27** (1999), 4673–4690.

[8] K. Herzinger and R. Sanford, *Minimal generating sets for relative ideals in numerical semigroups of multiplicity eight*, Comm. Alg., **32** (2006), 4713–4731.

[9] J. Herzog and E. Kunz, Der kanonische Modul eines Cohen–Macaulay–Rings, Lecture Notes in Mathematics **238**, Springer–Verlag, 1971.

[10] C. Huneke and R. Wiegand, *Tensor products of modules and the rigidity of Tor*, Math. Ann., **299** (1994), 449-476.

[11] C. Huneke and R. Wiegand, *Tensor products of modules, rigidity and local cohomology*, Math. Scand., **81** (1997), 161-183.

[12] M. J. Leamer, *Torsion and tensor products over domains and specialization to semigroup rings*, arXiv:1112.2896v1.

[13] J. Sally, *On the associated graded ring of a local Cohen-Macaulay ring*, J. Math. Kyoto Univ., **19** (1977), 19-21.

[14] J. Sally, Number of generators of ideals in local rings, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, **35**, Dekker, 1978.