

1次元局所環の \mathfrak{m} -準素イデアルの Hilbert 係数*

谷口直樹[†] · 小浦あす貴[‡] · 後藤四郎[§]

Hilbert coefficients of \mathfrak{m} -primary ideals in one-dimensional local rings

Naoki TANIGUCHI, Asuki KOURA, Shiro GOTO

Abstract

This paper mainly studies the behavior of the first Hilbert coefficients $e_1(I)$ of \mathfrak{m} -primary ideals I in one-dimensional local rings (A, \mathfrak{m}) . The purpose is to characterize those local rings A for which the first Hilbert coefficients $e_1(I)$ of \mathfrak{m} -primary ideals I sit within the range of finitely many values. Examples are explored.

目次

1 序文	1
2 定理 1.1 の証明の準備	2
3 定理 1.1 の証明	4
4 例	5
参考文献	7

Key Words and Phrases

Hilbert function, Hilbert coefficient, Cohen–Macaulay local ring

1 序文

A は可換な Noether 局所環で、次元 $d \geq 0$ とし、 \mathfrak{m} を唯一つの極大イデアルとする。環 A 内の \mathfrak{m} -準素イデアル I に対し、函数 $\ell_A(A/I^{n+1})$ ($n \geq 0$) をイデアル I の Hilbert 函数と呼ぶ。但し、 $\ell_A(A/I^{n+1})$ は、 A -加群 A/I^{n+1} の長さを表す。Hilbert 函数は十分大きな整数 $n \gg 0$ に対し、等式

で与えられる。ここで、 $\{e_i(I)\}_{0 \leq i \leq d}$ は整数である。右辺の n に関する d 次の多項式をイデアル I の Hilbert 多項式と呼び、整数 $e_i(I)$ をイデアル I の第 i -Hilbert 係数という。最高次係数である正整数 $e_0(I)$ は、イデアル I に関する環 A の重複度と呼ばれ、深い研究が行われている。

環 A に対して

$$\ell_A(A/I^{n+1}) = e_0(I) \binom{n+d}{d} - e_1(I) \binom{n+d-1}{d-1} + \cdots + (-1)^d e_d(I) \quad \Lambda(A) = \{e_1(I) \mid I \text{ は } A \text{ の } \mathfrak{m}\text{-準素イデアル}\}$$

*本論文の内容は、2012年3月5日(月)に第17回代数学若手研究会(静岡大学)で口頭発表済。

[†] 明治大学大学院理工学研究科基礎理工学専攻(数学系)

[‡] 大妻中野中学校・高等学校

[§] 明治大学理工学部数学科

とおく．本論文の目的は m -準素イデアル I の第 1-Hilbert 係数の挙動を解析することによって，主定理は次のように述べることができる．

定理 1.1. (A, m) は Noether 局所環で， $d = \dim A > 0$ とする．このとき，次の 2 条件は同値である．

- (1) 集合 $\Lambda(A)$ は有限である．
- (2) $d = 1$ であって，局所環 $A/H_m^0(A)$ は解析的不分岐 (analytically unramified) である．

ここで， $H_m^0(A)$ は環 A の極大イデアル m に関する 0 次局所コホモロジー加群を表す．

成田正雄 [4] によって，基礎環 A が Cohen-Macaulay のときは，いかなる m -準素イデアル I に対しても $e_1(I) \geq 0$ であることが知られている．従って，局所環 A が Cohen-Macaulay なら，集合 $\Lambda(A)$ が有限かどうかという問題は， I が全ての m -準素イデアルを動くとき， $e_1(I)$ の値が有限な上限を持つかどうかという問いであり，定理 1.1 はそのような Cohen-Macaulay 局所環は 1 次元の解析的不分岐な局所環に他ならないこと，即ち $\dim A = 1$ であってかつ環 A の m -進位相に関する完備化 \hat{A} 内には，0 の他には冪零元が含まれていないことと同値であることを示すものである．

定理 1.1 の証明は第 3 節で行うが，証明の鍵は 1 次元の Cohen-Macaulay 局所環における $e_1(I)$ の計算法である．この計算法はすでに E. Matlis [3] に見出されるが，本論文でも重要な役割を担うので，第 2 節で，やや異なった視点から手短かに触れたいと思う．

第 2 節で示すように，この方法により次の結果が得られる．ここで， \bar{A} は全商環 $Q(A)$ 内での環 A の整閉包を表す．

命題 1.2. (A, m) は 1 次元の Cohen-Macaulay 局所環であって，その剰余体 A/m は無限体と仮定する．このとき，等式

$\Lambda(A) = \{\ell_A(B/A) \mid B \text{ は } A \subseteq B \subseteq \bar{A} \text{ を満たす中間環で，有限生成 } A\text{-代数}\}$ が成り立つ．

命題 1.2 内の剰余体の大きさに関する仮定は，与えられた m -準素イデアルに対し，1 元で生成された極小節減の存在を保証するためである．

第 3 節で示すように，剰余体を拡大する標準的な方法により，命題 1.2 から定理 1.1 の核をなす次の結果が従う．

定理 1.3. (A, m) は 1 次元の Cohen-Macaulay 局所環とする．このとき

$$\sup \Lambda(A) = \ell_A(\bar{A}/A)$$

である．従って，集合 $\Lambda(A)$ が有限であるための必要十分条件は，環 A が解析的不分岐であることである．

定理 1.3 によって，我々は上限 $t = \sup \Lambda(A)$ の値を知ることができるが，このことは必ずしも $\Lambda(A) = \{n \in \mathbb{Z} \mid 0 \leq n \leq t\}$ であることを意味しない．そのような例を含めて，第 4 節で具体例の解析を行いたい．

2 定理 1.1 の証明の準備

この節を通して，特に断らない限り， (A, m) は 1 次元の Cohen-Macaulay 局所環とする．

I は環 A 内の m -準素イデアルとし，節減 (reduction) $Q = (a)$ を含むと仮定する．従って， Q は環 A の巴系イデアルで，ある整数 $r \geq 0$ に対し等式 $I^{r+1} = QI^r$ が成り立つ (このような節減は，剰余体 A/m が無限体なら，与えられた m -準素イデアル I に対し，常に存在することが知られている．) 整数 $n \geq 0$ に対し

$$\frac{I^n}{a^n} = \left\{ \frac{x}{a^n} \mid x \in I^n \right\} \subseteq Q(A)$$

とおき

$$B = A \left[\frac{I}{a} \right] \subseteq Q(A)$$

と定める．但し， $Q(A)$ は環 A の全商環である．このとき， $n \geq 0$ に対して， $\frac{I^n}{a^n} \subseteq \frac{I^{n+1}}{a^{n+1}}$ であるので， $n \geq r$ ならば $\frac{I^n}{a^n} = \frac{I^r}{a^r}$ となる．よって

$$B = \bigcup_{n \geq 0} \frac{I^n}{a^n} = \frac{I^r}{a^r} \cong I^r$$

であるから， B は有限生成 A -加群であって， $A \subseteq B \subseteq \bar{A}$ となる．

次の補題 2.1 が 1 次元の Cohen-Macaulay 局所環における Hilbert 係数計算の鍵である．

補題 2.1 (cf. [3]). (A, m) は 1 次元の Cohen-Macaulay 局所環で， I は m -準素イデアルとし，イデアル $Q = (a)$ は I の節減とする． $r \geq 0$ は整数で $I^{r+1} = QI^r$ なるものとする．このとき，次の主張が正しい．

- (1) $e_0(I) = \ell_A(A/Q)$.
- (2) $e_1(I) = \ell_A(I^r/Q^r) = \ell_A(B/A) \leq \ell_A(\bar{A}/A)$.

但し， $B = A \left[\frac{I}{a} \right]$ とする．

証明. 任意の $n \geq 0$ に対し

$$I^{n+1}/Q^{n+1} \cong \left[\frac{I^{n+1}}{Q^{n+1}} \right] / A \subseteq B/A$$

であって, $I^r/Q^r \cong B/A$ であるから

$$\begin{aligned} \ell_A(A/I^{n+1}) &= \ell_A(A/Q^{n+1}) - \ell_A(I^{n+1}/Q^{n+1}) \\ &\geq \ell_A(A/Q^{n+1}) - \ell_A(I^r/Q^r) \\ &= \ell_A(A/Q^{n+1}) - \ell_A(B/A) \\ &= \ell_A(A/Q) \binom{n+1}{1} - \ell_A(B/A) \end{aligned}$$

であり, $n \geq r-1$ ならば

$$\ell_A(A/I^{n+1}) = \ell_A(A/Q) \binom{n+1}{1} - \ell_A(B/A)$$

となる.

逆に, B は $A \subseteq B \subseteq \bar{A}$ であるような有限生成 A -代数とする. このとき, $aB \subsetneq A$ を満たす A の非零因子 $a \in \mathfrak{m}$ を選んで, $I = aB$ とおくと

$$I^2 = (aB)^2 = a^2B = a(aB) = aI$$

となる. 故に, $B = A \left[\frac{I}{a} \right] = \frac{I}{a}$ であるから, \mathfrak{m} -準素イデアル $I = aB$ に対し補題 2.1 を適用して, 次の等式が得られる.

命題 2.2. $\ell_A(B/A) = e_1(I) \in \Lambda(A)$.

ここで, 命題 2.2 を用いて, 定理 1.3 を部分的に証明しておきたい.

補題 2.3. (A, \mathfrak{m}) が 1 次元の Cohen-Macaulay 局所環なら

$$\sup \Lambda(A) \geq \ell_A(\bar{A}/A)$$

である.

証明. $t = \sup \Lambda(A)$ とおき, $t < \ell_A(\bar{A}/A)$ と仮定すると, ある $y_1, y_2, \dots, y_\ell \in \bar{A}$ で $\ell_A([Ay_1 + Ay_2 + \dots + Ay_\ell]/A) > t$ となるものが存在する. $B = A[y_1, y_2, \dots, y_\ell]$ とおくと, $A \subseteq B \subseteq \bar{A}$ である. 従って

$$t < \ell_A([Ay_1 + Ay_2 + \dots + Ay_\ell]/A) \leq \ell_A(B/A)$$

であるが, 命題 2.2 より $\ell_A(B/A) \in \Lambda(A)$ であるから, 不可能である. 故に

$$t \geq \ell_A(\bar{A}/A)$$

である.

命題 1.2 を証明しよう.

命題 1.2 の証明. I は A の \mathfrak{m} -準素イデアルとする. 剰余体 A/\mathfrak{m} が無限であるので, イデアル I の節減であるような巴系イデアル $Q = (a)$ をとることができる. $B = A \left[\frac{I}{a} \right]$ とおくと, B は有限生成 A -加群であって, 補題 2.1 から $e_1(I) = \ell_A(B/A)$ が従う. 故に, 集合 $\Lambda(A)$ は命題 1.2 に述べた右辺の集合に含まれる. 逆向きの包含は命題 2.2 に従う. \square

$\text{red}_Q(I) = \min\{r \geq 0 \mid I^{r+1} = QI^r\}$ と定め, I の Q に関する節減数 (reduction number) という.

命題 2.4. $\text{red}_Q(I) \leq e_1(I)$, $\mu_A(I/Q) \leq \ell_A(I/Q) \leq e_1(I)$ である. さらに, 次が正しい.

(1) $\ell_A(I/Q) = e_1(I)$ であるための必要十分条件は, $I^2 = QI$ である. \square

(2) $\mu_A(I/Q) = \ell_A(I/Q)$ であるための必要十分条件は, $\mathfrak{m}I \subseteq Q$, 即ち等式 $\mathfrak{m}I = \mathfrak{m}Q$ が成り立つことである.

証明. $r = \text{red}_Q(I)$ とおく. $r > 0$ としてよい. 包含列

$$(\#) 0 \hookrightarrow I/Q \xrightarrow{\cong} I^2/Q^2 \xrightarrow{\cong} \dots \xrightarrow{\cong} I^{r-1}/Q^{r-1} \xrightarrow{\cong} I^r/Q^r \xrightarrow{\cong} I^{r+1}/Q^{r+1} \xrightarrow{\cong} \dots$$

から, $\ell_A(I/Q) \leq \ell_A(I^r/Q^r) = e_1(I)$ が従う. 故に, $I^2 = QI$ なら, $\ell_A(I/Q) = e_1(I)$ である. 逆に, $\ell_A(I/Q) = e_1(I)$ なら, $I^i/Q^i \cong I^{i+1}/Q^{i+1}$ ($1 \leq i \leq r-1$) であるから, 列 ($\#$) より等式 $I^2 = QI$ が従う.

また, $\mu_A(I/Q) = \ell_A([I/Q]/\mathfrak{m}[I/Q])$ であるので, $\mu_A(I/Q) = \ell_A(I/Q)$ であることと $\mathfrak{m}I \subseteq Q$ であることは同値である. Q は I の極小節減であるので, この条件は $\mathfrak{m}I = \mathfrak{m}Q$ と同値である. \square

不等式 $\ell_A(I/Q) \leq e_1(I)$ は, Northcott の不等式と呼ばれている. なお, 命題 2.4 は容易に高次元に拡張される.

一般に, $\dim A \geq 0$ の Cohen-Macaulay 局所環 (A, \mathfrak{m}) が正則でないなら, 任意の巴系イデアル Q に対し等式

$$(Q :_A \mathfrak{m})^2 = Q \cdot (Q :_A \mathfrak{m})$$

が成り立つ ([1]). 故に, 命題 2.4 より直ちに次の主張が従う. ここで, $r(A)$ は環 A の Cohen-Macaulay 型, 即ち

$$r(A) = \ell_A(\text{Ext}_A^1(A/\mathfrak{m}, A))$$

とする.

系 2.5. (A, \mathfrak{m}) は 1 次元の Cohen-Macaulay 局所環とする. このとき, A が離散的付値環 (DVR) でないならば, 任意の巴系イデアル Q に対して, $e_1(Q :_A \mathfrak{m}) = r(A)$ である. \square

ここで、剰余体を拡大させる標準的な方法をまとめておきたい． (A, \mathfrak{m}) を Noether 局所環とし、多項式環 $A[X]$ の素イデアル $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}A[X]$ についての局所化 $A(X) = A[X]_{\mathfrak{p}}$ を考えると、合成射

$$\varphi: A \xrightarrow{i} A[X] \longrightarrow A(X) = A[X]_{\mathfrak{p}}$$

は局所平坦であるから、忠実平坦となる． $\mathfrak{n} = \mathfrak{m}A(X)$ とおく． \mathfrak{n} は Noether 局所環 $A(X)$ の極大イデアルであって、 $A(X)/\mathfrak{n} = k(X)$ であるから、局所環 $A(X)$ の剰余体は無限である．射 φ の平坦性と fiber 環 $A(X)/\mathfrak{m}A(X)$ が体であるという事実から、任意の A -加群 M に対し等式

$$\ell_A(M) = \ell_{A(X)}(A(X) \otimes_A M)$$

が成り立つことと、 A が Cohen–Macaulay 局所環であれば、 $A(X)$ も Cohen–Macaulay 局所環で $\dim A(X) = \dim A$ であることが従う．故に、 I が A の \mathfrak{m} -準素イデアルなら、 $IA(X)$ は $A(X)$ の \mathfrak{n} -準素イデアルで、任意の $n \geq 0$ に対し

$$\begin{aligned} \ell_A(A/I^{n+1}) &= \ell_{A(X)}(A(X) \otimes_A (A/I^{n+1})) \\ &= \ell_{A(X)}(A(X)/(IA(X))^{n+1}) \end{aligned}$$

となる．従って、 $\dim A > 0$ なら

事実 2.6. $e_0(I) = e_0(IA(X))$, $e_1(I) = e_1(IA(X))$

である．故に、Hilbert 函数を解析する上では、環 $A(X) = A[X]_{\mathfrak{m}A[X]}$ を経由して、一般性を失うことなく、環 A の剰余体 A/\mathfrak{m} は無限体であると仮定してよいことがわかる．

3 定理 1.1 の証明

以下、しばらくの間、 (A, \mathfrak{m}) は次元 $d \geq 1$ の Noether 局所環とする．まず、集合 $\Lambda(A) = \{e_1(I) \mid I \text{ は } A \text{ の } \mathfrak{m}\text{-準素イデアル}\}$ が有限なら、 $d = 1$ であることを示そう．

定理 1.1 (1) \Rightarrow (2) ($d = 1$) の証明． I は環 A の \mathfrak{m} -準素イデアルとする．任意の整数 $k \geq 1$ について

$$e_0(I^k) = k^d \cdot e_0(I), \quad e_1(I^k) = \frac{d-1}{2} \cdot e_0(I) \cdot k^d + \frac{2e_1(I) - e_0(I) \cdot (d-1)}{2} \cdot k^{d-1}$$

が成り立つ．実際、Hilbert 係数 $e_i(I^k)$ の定義より、 $n \gg 0$ に対し

$$(1) \quad \ell_A(A/(I^k)^{n+1}) = e_0(I^k) \binom{n+d}{d} - e_1(I^k) \binom{n+d-1}{d-1} + \cdots + (-1)^d e_d(I^k)$$

である．一方で

$$\begin{aligned} (2) \quad \ell_A(A/(I^k)^{n+1}) &= \ell_{A/I}(A/I^{(kn+k-1)+1}) \\ &= e_0(I) \binom{(kn+k-1)+d}{d} - e_1(I) \binom{(kn+k-1)+d-1}{d-1} \\ &\quad + \cdots + (-1)^d e_d(I) \end{aligned}$$

であって

$$\begin{aligned} \binom{kn+k+d-1}{d} &= k^d \binom{n+d}{d} + \alpha \binom{n+d-1}{d-1} + (d-2 \text{ 次以下の項}) \\ \binom{kn+k+d-2}{d-1} &= k^{d-1} \binom{n+d-1}{d-1} + (d-2 \text{ 次以下の項}) \end{aligned}$$

である．但し

$$\alpha = k^{d-1} \left(k + \frac{d-1}{2} \right) - \frac{k^d}{2} (d+1)$$

とする．

等式 (1), (2) の d 次の項の係数を比べて

$$e_0(I^k) = k^d \cdot e_0(I)$$

を得られ、等式 (1), (2) の $d-1$ 次の項の係数を比べて

$$\begin{aligned} e_1(I^k) &= -e_0(I)\alpha + e_1(I)k^{d-1} \\ &= -e_0(I) \left(k^d + \frac{d-1}{2} k^{d-1} - \frac{d+1}{2} k^d \right) + e_1(I)k^{d-1} \\ &= \frac{d-1}{2} \cdot e_0(I) \cdot k^d + \frac{2e_1(I) - e_0(I) \cdot (d-1)}{2} \cdot k^{d-1} \end{aligned}$$

が得られる．故に、 $k \geq 1$ の範囲で k がもれなく動くとき、 $e_1(I^k)$ が有限個の値しかとらないなら、 $d = 1$ でなければならぬことがわかる． \square

定理 1.3 の証明． $\sup \Lambda(A) = \ell_A(\overline{A}/A)$ を示すには、補題 2.3 より $\sup \Lambda(A) \leq \ell_A(\overline{A}/A)$ を示せば十分である． $\ell_A(\overline{A}/A) < \infty$ としてよい．従って、 \overline{A} は有限生成 A -加群であるから、 \widehat{A} は reduced である．故に、 A も reduced であるから、 X を環 A 上の不定元とし $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}A[X]$ とおけば、 $\overline{A[X]} = \overline{A}[X]$ となる．従って

$$\overline{A[X]}_{\mathfrak{p}} = \overline{A[X]}_{\mathfrak{p}} = \overline{A(X)}$$

である．

さて、 $B = A(X)$ とし、 $\mathfrak{n} = \mathfrak{m}B$ とおく． (B, \mathfrak{n}) は Cohen–Macaulay 局所環で $\dim B = 1$ である． I を A の \mathfrak{m} -準素イデアルとすると、剰余体 B/\mathfrak{n} は無限であるから、ある $a \in IB$ が存在して、 aB はイデアル IB の節減となる．故に、補題 2.1 (2) と事実 2.6 から

$$e_1(I) = e_1(IB) \leq \ell_B(\overline{B}/B)$$

が従う．一方で、 $\overline{A[X]}_{\mathfrak{p}} = \overline{B}$ であり、かつ B は A -平坦なので、 A -加群の完全列

$$0 \rightarrow A \rightarrow \overline{A} \rightarrow \overline{A}/A \rightarrow 0$$

より、 B -加群の完全列

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & B \otimes_A A & \rightarrow & B \otimes_A \overline{A} & \rightarrow & B \otimes_A \overline{A}/A \rightarrow 0 \\ & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\ & & B & & \overline{B} & & \overline{B}/B \end{array}$$

得られる．故に

$$e_1(I) = e_1(IB) \leq \ell_B(\overline{B}/B) = \ell_A(\overline{A}/A)$$

となり

$$\sup \Lambda(A) = \ell_A(\overline{A}/A)$$

が得られる．

環 A が解析的不分岐であるための必要十分条件は， \overline{A} の A -加群としての有限生成性であるので，等式 $\sup \Lambda(A) = \ell_A(\overline{A}/A)$ から，集合 $\Lambda(A)$ の有限性が環 A の解析的不分岐性と同値であることが従う． \square

基礎環 A が必ずしも Cohen–Macaulay でない場合は，定理 1.3 は次のように記述される．

定理 3.1. (A, \mathfrak{m}) は 1 次元の Noether 局所環とする．このとき，等式

$$\begin{aligned} \sup \Lambda(A) &= \ell_B(\overline{B}/B) - \ell_A(H_{\mathfrak{m}}^0(A)), \\ \inf \Lambda(A) &= -\ell_A(H_{\mathfrak{m}}^0(A)) \end{aligned}$$

が成り立つ．但し， $H_{\mathfrak{m}}^0(A)$ は環 A の極大イデアル \mathfrak{m} に関する 0 次局所コホモロジー加群とし， $B = A/H_{\mathfrak{m}}^0(A)$ とする．

証明. $W = H_{\mathfrak{m}}^0(A)$ とする． $B = A/W$ は 1 次元 Cohen–Macaulay 局所環である． I を A の \mathfrak{m} -準素イデアル， $n \geq 0$ とし，次の完全列を考える：

$$0 \rightarrow W/[I^{n+1} \cap W] \rightarrow A/I^{n+1} \rightarrow B/I^{n+1}B \rightarrow 0.$$

十分大きな $n \gg 0$ に対し $I^{n+1} \cap W = (0)$ であるから

$$\begin{aligned} \ell_A(A/I^{n+1}) &= \ell_A(B/I^{n+1}B) + \ell_A(W) \\ &= e_0(IB) \binom{n+1}{1} - e_1(IB) + \ell_A(W) \end{aligned}$$

である．従って，成田の定理 [4] より

$$e_0(I) = e_0(IB), \quad e_1(I) = e_1(IB) - \ell_A(W) \geq -\ell_A(W)$$

である． I が巴系イデアルなら， IB は環 B の巴系イデアルであるから

$$e_1(I) = e_1(IB) - \ell_A(W) = -\ell_A(W)$$

となる． $n = m/W$ とすれば，環 B の n -準素イデアル J は，環 A のある \mathfrak{m} -準素イデアル I によって $J = IB$ という形に表すことができるから，定理 1.3 から，等式

$$\begin{aligned} \sup \Lambda(A) &= \sup \Lambda(B) - \ell_A(W) \\ &= \ell_B(\overline{B}/B) - \ell_A(W), \end{aligned}$$

$$\inf \Lambda(A) = -\ell_A(W)$$

が従う．

故に，次の主張が正しい．

系 3.2. (A, \mathfrak{m}) は 1 次元の Noether 局所環とする．このとき，集合 $\Lambda(A)$ が有限であるための必要十分条件は，局所環 $B = A/H_{\mathfrak{m}}^0(A)$ が解析的不分岐であることである．

系 3.2 から，定理 1.1 (2) \Rightarrow (1) が従う．定理 1.1 (1) \Rightarrow (2) の主張の中で， $d = 1$ であることは，本節の冒頭に示したので，系 3.2 により定理 1.1 の証明が完成する．

4 例

具体例を解析しよう．

a_1, a_2, \dots, a_ℓ ($\ell \geq 1$) は正整数で， $\text{GCD}(a_1, a_2, \dots, a_\ell) = 1$ とする． $V = k[[t]]$ は体 k 上の形式的冪級数環とし $A = k[[t^{a_1}, t^{a_2}, \dots, t^{a_\ell}]]$ ， $H = \langle \sum_{i=1}^{\ell} c_i a_i \mid 0 \leq c_i \in \mathbb{Z} \rangle$ とおく．即ち， A は数値半群 H の半群環である．従って， $V = \overline{A}$ であり， $\ell_A(V/A) = \#(\mathbb{N} \setminus H)$ である．但し， $\mathbb{N} = \{n \mid 0 \leq n \in \mathbb{Z}\}$ とする．

$c = c(H)$ (数値半群 H の conductor) とおく．

例 4.1. $q = \#(\mathbb{N} \setminus H)$ とすると， $\Lambda(A) = \{0, 1, \dots, q\}$ である．

証明. $q > 0$ としてよい．故に， $c \geq 2$ である． $S = \{1 = c_1 < c_2 < \dots < c_q = c - 1\}$ と表し，各 $1 \leq i \leq q$ に対し， $B_i = A[t^{c_i}, t^{c_{i+1}}, \dots, t^{c_q}]$ とおくと

$$V = B_1 \supseteq B_2 \supseteq \dots \supseteq B_q \supseteq B_{q+1} := A$$

である． $\ell_A(V/A) = q$ であるから，この列は， V から A に至る A -加群としての組成列である．故に，各 $1 \leq i \leq q+1$ に対し， $\ell_A(B_i/A) = q+1-i$ となる． $a = t^c$ とし $I_i = aB_i$ ($\subsetneq A$) とおくと，命題 2.2 より， $e_1(I_i) = q+1-i$ である．よって， $V = \overline{A}$ であるので， $\Lambda(A) = \{0, 1, \dots, q\}$ が従う． \square

数値半群環 $A = k[[t^{a_1}, t^{a_2}, \dots, t^{a_\ell}]]$ が Gorenstein のとき，即ち H が対称 (symmetric) なら， $q = \frac{c(H)}{2}$ であるから，直ちに次が従う．

系 4.2. 数値半群 H が対称なら， $\Lambda(A) = \{0, 1, \dots, \frac{c(H)}{2}\}$ である．

\square もう一つ，数値半群環の例を述べよう．

系 4.3. $n \geq 2$ は整数とし, $A = k[[t^n, t^{n+1}, \dots, t^{2n-1}]]$ とする. このとき, $\Lambda(A) = \{0, 1, \dots, n-1\}$ である.

$$I = (t^n, t^{n+1}, \dots, t^{2n-2})$$

とおくと

$$e_1(I) = \begin{cases} r(A) - 1 & (n = 2), \\ r(A) & (n \geq 3) \end{cases}$$

となる.

証明. 例 4.1 より, $\Lambda(A) = \{0, 1, \dots, n-1\}$ である. $I = (t^n, t^{n+1}, \dots, t^{2n-2})$ とおく. $n = 2$ なら, $A = k[[t^2, t^3]]$, $I = (t^2)$ である. A は Gorenstein 環であるから, $r(A) = 1$ であり, I は環 A の巴系イデアルなので, $e_1(I) = 0$ である. 故に, $e_1(I) = r(A) - 1$ を得る. $n \geq 3$ とする. $Q = (t^n)$ とおくと, $Qk[[t]] = Ik[[t]]$ であるから, Q は I の節減である. $A \left[\frac{I}{t^n} \right] = k[[t]]$ であって, $\mathfrak{m} = t^n V$ であるから, $A :_{Q(A)} \mathfrak{m} = k[[t]]$ となる. 故に, 補題 2.1 より

$$e_1(I) = \ell_A(k[[t]]/A) = \ell_A([A :_{Q(A)} \mathfrak{m}]/A) = r(A)$$

が従う. \square

注意 4.4. 例 4.3 のイデアル I は, 環 A の正準イデアルである. 従って, 等式 $e_1(I) = r(A)$ は, $n \geq 3$ のときは, A が論文 [2] の意味で almost Gorenstein 環であることを示している.

環 A が解析的既約 (analytically irreducible) でない例を調べよう.

例 4.5. $n \geq 2$ は整数とし, (R, \mathfrak{n}) は n 次元の正則局所環とする. $\mathfrak{n} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ とし, 各 $1 \leq i \leq n$ に対し, $P_i = (X_j \mid 1 \leq j \leq n, j \neq i)$ とおき

$$A = R \left/ \bigcap_{i=1}^n P_i \right.$$

とする. このとき, A は 1 次元の Cohen-Macaulay 局所環であって, $\Lambda(A) = \{0, 1, \dots, n-1\}$ となる.

証明. x_i は X_i の環 A 内の像とし, $\mathfrak{p}_i = (x_j \mid 1 \leq j \leq n, j \neq i)$ とおく. $B = \prod_{i=1}^n (A/\mathfrak{p}_i)$ とし

$$\varphi : A \rightarrow B, a \mapsto (\bar{a}, \bar{a}, \dots, \bar{a})$$

とすると, φ は単射であり, 射 φ を通して, $B = \bar{A}$ と見ることができる. $\mathfrak{m}B = \mathfrak{m}$ であって, $\mu_A(B) = n$ である

から, $\ell_A(B/A) = n-1$ である. 各 $1 \leq j \leq n$ に対し $e_j = (0, \dots, 0, \overset{j}{1}, 0, \dots, 0)$ とし, $e = \sum_{j=1}^n e_j$ とおく. 故に, $B = Ae + Ae_1 + \dots + Ae_{n-1}$ である. さて, 各 $1 \leq i \leq n-1$ に対し

$$B_i = Ae + Ae_1 + \dots + Ae_i$$

としよう. $B_i = A[e_1, e_2, \dots, e_i]$ であるから, B_i は B の有限生成 A -部分代数であり, $e_{i+1} \notin B_i$ であるが, しかし $e_{i+1} \in B_{i+1}$ なので, $B_i \subsetneq B_{i+1}$ である. よって

$$B = B_{n-1} \supsetneq B_{n-2} \supsetneq \dots \supsetneq B_1 \supsetneq B_0 := A$$

は環 B から A に至る A -加群としての組成列を成し, $0 \leq i \leq n-1$ に対し $\ell_A(B_i/A) = i$ であることが従う. 故に, $\Lambda(A) = \{0, 1, \dots, n-1\}$ である. \square

A が次元 1 の Cohen-Macaulay 局所環で reduced でないなら, 集合 $\Lambda(A)$ は無限集合である. ここで, $\Lambda(A)$ が連続した値をとる無限集合であるような例を述べよう.

例 4.6. V は離散的付値環とし, $A = V \times V$ はイデアル化とする. このとき, $\Lambda(A) = \{n \mid 0 \leq n \in \mathbb{Z}\}$ である.

証明. $K = Q(V)$ とすると, $Q(A) = K \times K$, $\bar{A} = V \times K$ である. 整数 $n \geq 0$ に対し, $B_n = V \times \left(V \cdot \frac{1}{t^n} \right)$ とおくと, $A \subseteq B_n \subseteq \bar{A}$ となる. このとき,

$$\begin{aligned} \ell_A(B_n/A) &= \ell_V(B_n/A) \\ &= \ell_V([V \oplus \left(V \cdot \frac{1}{t^n} \right)]/[V \oplus V]) \\ &= \ell_V(V \cdot \frac{1}{t^n}/V) \\ &= \ell_V(V/t^n V) \\ &= n \end{aligned}$$

であるので, 命題 2.2 より $n \in \Lambda(A)$ となる. 故に, $\Lambda(A) = \{n \mid 0 \leq n \in \mathbb{Z}\}$ である. \square

最後に, 集合 $\Lambda(A)$ が連続的な値をとらない例を挙げておこう.

例 4.7. K/k ($K \neq k$) は有限次体拡大で, K と k の間には真の中間体が含まれていないとする (例えば, 拡大次数 $[K : k]$ が素数であるような体拡大を考える). $n = [K : k]$ とし, $\{\omega_i\}_{1 \leq i \leq n}$ を K の k 上のベクトル空間としての基底とする. $K[[t]]$ を K 上の形式的冪級数環とし, $A = k[[\omega_1 t, \omega_2 t, \dots, \omega_n t]] \subseteq K[[t]]$ とおくと

$$\Lambda(A) = \{0, n-1\}$$

である.

証明. $V = K[[t]]$ とおくと, $V = \sum_{i=1}^n A\omega_i$, $V = \bar{A}$ となる.

$tV \subseteq A$ であるので, $\mathfrak{n} = tV = \mathfrak{m}$ を得る (ここで, \mathfrak{m} , \mathfrak{n} はそれぞれ A , V の極大イデアルを表す). 故に $\ell_A(V/A) = n-1$ である. さて, B が $A \subseteq B \subseteq V$ を満たす環なら, B は局所環であり, その極大イデアルを \mathfrak{m}_B で表すと, $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_B = \mathfrak{n}$ となる. 故に, 体拡大

$$k = A/\mathfrak{n} \subseteq B/\mathfrak{n} \subseteq K = V/\mathfrak{n}$$

が得られるが, K と k の間には真の中間体は含まれていないので, $V = B$ か, $B = A$ であることが直ちに従う. $V = \bar{A}$ は離散的付値環であるから, 環 A の \mathfrak{m} -準素イデアルは必ず 1 元で生成された節減 Q を含む. 故に, 補題 2.1 より $\Lambda(A) = \{0, n-1\}$ が得られる. \square

参考文献

- [1] A. Corso and C. Polini, *Links of prime ideals and their Rees algebras*, J. Algebra **178** (1995), 224-238.
- [2] S. Goto, N. Matsuoka, and T. T. Phuong, *Almost Gorenstein rings*, Preprint 2011.
- [3] E. Matlis, *1-Dimensional Cohen-Maculay Rings*, Lecture Notes in Mathematics, **327**, (1973), Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York.
- [4] M. Narita, *A note on the coefficients of Hilbert characteristic functions in semi-regular local rings*, Proc. Cambridge Philos. Soc., **59**(1963), 269-275.