Blow-up 代数の環構造論

遠藤 直樹（明治大学政治経済学部）

1 はじめに

本小稿では, blow-up 代数を巡る歴史的潮流を概観する。Blow-up 代数の環論的性質については, 第 51 回代数学シンポジウムにおいて, 後藤四郎明治大学名誉教授が「blow-up 代数の可換環論」と題するご講演を行い, 1970 年代から 2000 年代に至る発展の道筋を整理・概説された。本小稿では, その流れを受け, とりわけ 2010 年代以降から近年にかけての話題を中心として, 私自身が関わってきた範囲に重点を置きつつ, 謂わば「blow-up 代数の可換環論」の続編に相当する位置付けで論じる。なお, blow-up 代数の Gorenstein 性に関しては, 第 67 回代数学シンポジウムにおいて, 北海道教育大学の居相真一郎先生がご講演「ブローアップ代数のゴレンシュタイン性について」の中で, 精緻かつ体系的に論じられている。

定義 1.1 (Blow-up 代数)**.** 可換 Noether 環 A 内のイデアル I に対して

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(I) &= A[It] \subseteq A[t]\\ \mathcal{R}'(I) &= A[It, t^{-1}] \subseteq A[t, t^{-1}]\\ G(I) &= \mathcal{R}'(I)/t^{-1}\mathcal{R}'(I) \cong \mathcal{R}(I)/I\mathcal{R}(I)\end{aligned}$$

と定め, それぞれイデアル I の Rees 代数, 拡大 Rees 代数, 随伴次数環といい, これらを総称して, イデアル I の blow-up 代数と呼ぶ[1]。但し, t により, A 上の不定元を表す。

Blow-up 代数に関する基本的事項については, [6, Section 4.5], [54], [92, Chapter 5], [98], [99], [112, 第 3 章第 2 節] 等を参照されたい。代数幾何学の観点では, Rees 代数 $\mathcal{R}(I)$ はイデアル I の生成元 $a_1, a_2, \dots, a_\ell$ から定まる有理写像 $\mathrm{Spec}\, A \dashrightarrow \mathbb{P}^{\ell-1}$ のグラフの閉包の斉次座標環として登場し, 後に定義を紹介する射影スキーム $\mathrm{Proj}\, \mathcal{R}(I)$ は $\mathrm{Spec}\, A$ の I が定める部分スキーム $V(I)$ に沿った blowing up を与える ([21, IV.2 Blow-ups])。

一方, 可換環論の文脈における Rees 代数の淵源は, D. Rees による 1956 年の研究 [79] に遡る。Rees は, 実際には Rees 代数そのものではなく, 拡大 Rees 代数を導入・考察し, Krull の交叉定理の鮮やかな別証明を提示すると共に, Artin-Rees の補題を準備し, これを用いて Krull の単項イデアル定理の別証明を与えた。なお, Artin-Rees の補題の名称に関して, Rees は次のように経緯を説明している。Rees 自身は 1954 年の時点で既に当該証明を得ていたものの, 論文として投稿したのは 1955 年 5 月になってからであった。ところが, 論文 [79] が出版された 1956 年のまさにその月に, E. Artin は日本で開催された研究集会において, 同一の議論と結果を発表した。その為, どちらの功績に帰すべきかの裁定を永田雅宜先生に仰いだところ,「それは明らかに Artin-Rees の補題である」と答えたと述べている ([82, pages 563–564])。

さて, A 上の多項式環 $A[t]$ と Laurent 多項式環 $A[t, t^{-1}]$ を自然に $\mathbb{Z}$-次数環とみなすと, それらの次数付けにより, blow-up 代数も $\mathbb{Z}$-次数環の構造を持つ。即ち

$$\mathcal{R}(I) = \bigoplus_{n\geq 0} I^n t^n, \quad \mathcal{R}'(I) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} I^n t^n, \quad G(I) \cong \bigoplus_{n\geq 0} I^n/I^{n+1}$$

[1] Rees 代数のことを blow-up 代数と呼ぶ流儀もある。また, $(A, \mathfrak{m})$ が Noether 局所環である場合には, イデアル I に関する fiber cone $\mathcal{F}(I) = \mathcal{R}(I)/\mathfrak{m}\mathcal{R}(I) \cong \bigoplus_{n\geq 0} I^n/\mathfrak{m}I^n$ も blow-up 代数に含めることがある。

である。但し, $n \le 0$ に対しては, $I^n = A$ と定める。特に, A は $\mathcal{R}(I)$ の環直和因子である。また, イデアル I の生成元 $a_1, a_2, \dots, a_\ell$ を取り, $I = (a_1, a_2, \dots, a_\ell)$ と表すと

$$\mathcal{R}(I) = A[a_1 t, a_2 t, \dots, a_\ell t]$$

が成り立つ。従って, blow-up 代数 $\mathcal{R}(I), \mathcal{R}'(I), G(I)$ は全て Noether 環である。

命題 1.2 ([97, Corollary 1.6, Remark 1.7], [92, Theorem 5.1.4, Proposition 5.1.6])**.** Noether 環 A の Krull 次元 $d = \dim A$ は有限とし, $I \ne A$ と仮定する。次の主張が成り立つ。

(1) $\dim \mathcal{R}(I) = \begin{cases} d+1 & (\exists\, P \in \operatorname{Spec} A \text{ s.t. } I \not\subseteq P \text{ and } \dim A/P = d) \\ d & (\text{その他}) \end{cases}$

(2) $\dim \mathcal{R}'(I) = d+1$

(3) $\dim G(I) \le d$ であり, $(A, \mathfrak{m})$ が Noether 局所環ならば, $\dim G(I) = d$

注意 1.3. $(A, \mathfrak{m})$ が Noether 局所環でない場合には, $\dim G(I) = d$ は一般には成立しない。実際, $R = k[X, Y, Z]$ は体 k 上の多項式環とし, 積閉集合 $S = R \setminus \{(X, Y) \cup (Z)\}$ を考える。そこで, $A = S^{-1}R$ とおくと, A は Noether 環であって, $\mathfrak{m} = (X, Y)A$ と $\mathfrak{n} = (Z)A$ は環 A 内の極大イデアルである。特に, $\operatorname{ht}_A \mathfrak{m} = 2 > 1 = \operatorname{ht}_A \mathfrak{n}$ となる。従って

$$\dim G(\mathfrak{n}) = \dim G(\mathfrak{n}A_\mathfrak{n}) = \dim A_\mathfrak{n} = \operatorname{ht}_A \mathfrak{n} < \operatorname{ht}_A \mathfrak{m} \le \dim A$$

が得られる。

ここで, $\mathcal{R}(I)_+ = \bigoplus_{n>0} I^n t^n$ とおくと, $\mathcal{R}(I)_+$ は $\mathcal{R}(I)$ の次数付きのイデアルである。集合

$$\operatorname{Proj} \mathcal{R}(I) = \{P \in \operatorname{Spec} \mathcal{R}(I) \mid P \text{ は次数付き}, \mathcal{R}(I)_+ \not\subseteq P\}$$

を考えると, 空間 $\operatorname{Proj} \mathcal{R}(I)$ にはスキームの構造が入る。自然な射 $f : \operatorname{Proj} \mathcal{R}(I) \to \operatorname{Spec} A$ を $\operatorname{Spec} A$ の閉集合 $V(I)$ を中心とする blowing-up と呼ぶ。Noether 局所環 $(A, \mathfrak{m})$ の特異点解消とは, 射影的射 $f : X \to \operatorname{Spec} A$ であって, X が非特異であり, f の制限 $X \setminus f^{-1}(\mathfrak{m}) \to \operatorname{Spec} A \setminus \{\mathfrak{m}\}$ が同型であることをいう ([112, 第 3 章第 2 節])。

Blowing-up は特異点解消の基本的手法であり, その幾何学的側面については古典以来, 膨大な研究が蓄積されている。一方で, 私の興味はスキーム $\operatorname{Proj} \mathcal{R}(I)$ の斉次座標環である $\mathcal{R}(I)$ の環論的側面にある。即ち, 本研究の目的は, 下記の通りである。

研究の目的

Blow-up 代数の環論的性質を調べる。

Blow-up 代数の環構造を解析する上で, 分析の視座の適切な設定は不可欠である。本研究では, 次の Noether 局所環の階層を指標とする環構造解析に従事する。

Noether 局所環の階層

- 正則局所環 $\Longrightarrow$ 完全交叉環 $\Longrightarrow$ Gorenstein 環 $\Longrightarrow$ Cohen-Macaulay 環 $\Longrightarrow$ Buchsbaum 環, 系列的 Cohen-Macaulay 環
- 正則局所環 $\Longrightarrow$ 有理特異点 $\Longrightarrow$ Cohen-Macaulay 正規環
- 正則局所環 $\Longrightarrow$ 弱 F-正則環 $\Longrightarrow$ F-有理環 $\Longrightarrow$ Cohen-Macaulay 正規環

第 1 行はホモロジー代数的視点に基づく階層であり, 第 2 行は特異点論的視点, 第 3 行は正標数の視点 (最後の含意には, 基礎環は Cohen-Macaulay 環の準同型像という仮定が必要である) の階層である。

現在では, blow-up 代数の環構造解析は可換環論の中核的課題の 1 つとして, 確固たる地位を築くに至っているが, 1970 年代半ば頃までを顧みれば, Rees 代数の環論的性質の研究は, いくつかの具体例と散発的な結果を除いて, 包括的な理論の体系化はなお途上にあった ([106, page 6])。以下に, その代表例を紹介する。

例 1.4. 体 k 上の多項式環 $A = k[X_1, X_2, \dots, X_d]$ $(d \geq 2)$ 内において, 不定元で生成されるイデアル $I = (X_1, X_2, \dots, X_d)$ を考えると, 次の同型

$$\mathcal{R}(I) \cong k[X_1, X_2, \dots, X_d, Y_1, Y_2, \dots, Y_d]/\mathrm{I}_2 \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & \cdots & X_d \\ Y_1 & Y_2 & \cdots & Y_d \end{pmatrix}$$

が成り立つ。但し, $\mathrm{I}_2(\mathbb{M})$ により, 行列 $\mathbb{M}$ の 2 次小行列式全体が生成するイデアルを表す。

例 1.4 において, Rees 代数 $\mathcal{R}(I)$ は行列式環として現れ, ASL (Algebras with Straightening Law) の枠組みで捉えられるため ([6, Section 7.2]), 組合せ論的視点からの考察が可能である。この環は多項式環の Segre 積 $k[X_1, X_2]\#k[Y_1, Y_2, \dots, Y_d]$ でもあり ([53, page 197], [80, page 653]), 標数 0 の体 k に対しては, 一般線型群の不変式環としても実現される ([7, Theorem (7.6)], [15], [93, page 1166])。環構造に目を向けると, この $\mathcal{R}(I)$ は Cohen-Macaulay 正規整域であって, 体 k の標数が 0 である場合には有理特異点 ([103, (6.1.5) Corollary (b)]), 正標数の場合には F-正則特異点 ([5, Theorem 3.1], [59, Theorem (7.14)]) となる。以上の事実は, Rees 代数が多様な視点からの探求に値する豊かな研究対象であることを物語っている。

例 1.5 ([1, Proposition 2, Corollary], [97, Theorem 3.1])**.** Noether 環 A 内の正則列[2] $a_1, a_2, \dots, a_d \in A$ $(d \geq 2)$ に対して, $I = (a_1, a_2, \dots, a_d)$ とおくと

$$\mathcal{R}(I) \cong A[Y_1, Y_2, \dots, Y_d]/\mathrm{I}_2 \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_d \\ Y_1 & Y_2 & \cdots & Y_d \end{pmatrix}$$

が成り立つ。但し, $A[Y_1, Y_2, \dots, Y_d]$ は A 上の多項式環を表す。従って, A が Cohen-Macaulay 局所環ならば, 任意の $n \geq 1$ に対して, $\mathcal{R}(I^n)$ は Cohen-Macaulay 環である。

例 1.4, 1.5 の証明は, 原論文以外にも, [106, 例 1.3, 命題 1.4] に記載されている。なお, 正則列が生成するイデアル I の随伴次数環は A/I 上の多項式環に同型である ([6, Theorem 1.1.8])。正則列が生成するイデアルの冪の拡大 Rees 代数や随伴次数環に関しては, [60, Section 4], [97, Theorem 3.2] を参照されたい。

2 Blow-up 代数の Cohen-Macauay 性

Blow-up 代数の Cohen-Macaulay 性解析に関しては, [106, 第 4 節, 第 7 節] に詳細な記述がある。歴史を遡れば, Cohen-Macaulay 環という名称は, F. S. Macaulay と I. S. Cohen の結果に由来する。1916 年, Macaulay は体上の多項式環において非混合定理[3] (the unmixedness theorem) が成り立つことを示し ([71]), 1946 年には, O. Zariski の学生であった Cohen が正則局所環の場合に同定理が成り立つことを証明した ([14])。以上を背景に, Cohen-Macaulay 環は非混合定理を満たす環として定義された。特に, Noether 局所環に対しては, Krull 次元と深さ (depth) が一致することと同値となる。

以下, $(A, \mathfrak{m})$ は Noether 局所環とし, $d = \dim A$ とする。

[2] M は A-加群とする。A の元の列 $a_1, a_2, \dots, a_d$ が M-正則列であるとは, 任意の $1 \leq i \leq d$ に対して, a_i は $M/(a_1, a_2, \dots, a_{i-1})M$ 上の非零因子であり, かつ $(a_1, a_2, \dots, a_d)M \neq M$ を満たすことをいう。

[3] Noether 環 A 内で非混合定理が成り立つとは, イデアル I が $n = \mathrm{ht}_A I$ 個の元で生成されるとき, 任意の $P \in \mathrm{Ass}_A A/I$ に対して, $\mathrm{ht}_A P = n$ であることをいう。

定義 2.1. A が Cohen-Macaulay 環であるとは, $\dim A = \operatorname{depth} A$ が成り立つことである。

Noether 局所環が Cohen-Macaulay であることと, 任意の巴系[4]が正則列を成すことは同値であり, また 1 つでも正則列をなすような巴系を含めば, その局所環は必ず Cohen-Macaulay 環である。整数 $i \in \mathbb{Z}$ に対して, A の極大イデアル $\mathfrak{m}$ に関する i 次局所コホモロジー加群

$$\mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(A) = \varinjlim_n \operatorname{Ext}^i_A(A/\mathfrak{m}^n, A)$$

を考えると, 等式

$$\dim A = \sup\{n \in \mathbb{Z} \mid \mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(A) \neq (0)\}, \quad \operatorname{depth} A = \inf\{n \in \mathbb{Z} \mid \mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(A) \neq (0)\}$$

が成り立つ ([6, Theorem 3.5.7])。従って, A が Cohen-Macaulay 環であることと次の条件

$$\mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(A) = (0) \quad (\forall\, i \neq d)$$

は同値である。必ずしも局所環とは限らない Noether 環 A が Cohen-Macaulay であるとは, 任意の $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ に対して, 局所環 $A_{\mathfrak{p}}$ が Cohen-Macaulay であることと定める。

Rees 代数の Cohen-Macaulay 性解析において, 決定的な役割を果たしたのは, Hochster-Roberts による次の例である。

例 2.2 ([61, Example 2.2], [34, Example 3.4])**.** 体 k 上の形式的冪級数環 $k[[X, Y]]$ の部分環 $A = k[[X^2, Y, X^3, XY]]$ は Cohen-Macaulay ではない[5]が, イデアル $I = (X^2, Y)$ に関する Rees 代数 $\mathcal{R}(I)$ は Cohen-Macaulay 環である。

例 2.2 の帰結として, 環の Cohen-Macaulay 性が環直和因子を取る操作で保たれないことが従う。Hochster-Roberts が例 2.2 を提示した目的は, この事実を指摘することにあったが, 例 2.2 は別の観点から眺めても示唆に富む。即ち, 基礎環が Cohen-Macaulay でない場合であっても, イデアルを適切に選べば, Rees 代数が Cohen-Macaulay 環となり得ることを示している。実際, 下田保博により, この現象は精緻に解析され, 次の定理として定式化された。

定理 2.3 ([83, Theorem], [49, Theorem (1.1)])**.** 次の 2 条件は同値である。

(1) A は Buchsbaum 環であり, かつ $\mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(A) = (0)$ $(\forall\, i \neq 1, d)$ である。

(2) A の任意の巴系イデアル[6]Q に対して, $\mathcal{R}(Q)$ は Cohen-Macaulay 環である。

上記の同値条件が成り立つとき, A の任意の巴系イデアル Q と任意の $n \geq 1$ に対して, $\mathcal{R}(Q^n)$ は Cohen-Macaulay 環である。

定理 2.3 は, 下田により, まず基礎環が 2 次元 Noether 局所整域の場合に示され, その後, 後藤-下田によって, 高次元の場合を含む上記の定理の形へと一般化された。なお, A が重複度 2 の Buchsbaum 局所環であって, $\operatorname{depth} A > 0$ であると仮定すると, $\mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(A) = (0)$ $(\forall\, i \neq 1, d)$ が成り立つ ([34, Theorem 1.1])。特に, 例 2.2 における環 A は定理 2.3 の条件 (1) を満たすので, 巴系イデアル $I = (X^2, Y)$ に関する Rees 代数 $\mathcal{R}(I)$ は Cohen-Macaulay 環である。

定理 2.3 を踏まえると, 極大イデアル $\mathfrak{m}$ に関する Rees 代数の環構造解析は, 自ずから生起する課題であり, 次の定理が, 所謂, Rees 代数の Cohen-Macaulay 性に関する「後藤-下田の定理」である。

---

[4] $M \neq (0)$ は有限生成 A-加群とし, $s = \dim_A M$ とする。$\mathfrak{m}$ の元の列 $a_1, a_2, \ldots, a_s$ が M の巴系であるとは, $\ell_A(M/(a_1, a_2, \ldots, a_s)M) < \infty$ を満たすことをいう。

[5] 環 A は $\dim A = 2$, $\operatorname{depth} A = 1$ であって, 重複度 2 の Buchsbaum 局所環である。

[6] 巴系で生成されたイデアルのことである。

定理 2.4 ([50, Theorem (1.1), Remark (3.10)]). $(A, \mathfrak{m})$ は Cohen-Macaulay 局所環, $d = \dim A \geq 1$ とし, I は A の $\mathfrak{m}$-準素イデアルとする。このとき, 次の 2 条件は同値である。

(1) $\mathcal{R}(I)$ は Cohen-Macaulay 環である。

(2) $G(I)$ が Cohen-Macaulay 環であり, かつ $\mathrm{a}(G(I)) < 0$ である。

ここで, $\mathfrak{M} = \mathfrak{m}\mathcal{R}(I) + \mathcal{R}(I)_+$ により, $\mathcal{R}(I)$ の次数付き極大イデアルを表し

$$\mathrm{a}(G(I)) = \sup\{n \in \mathbb{Z} \mid [\mathrm{H}^d_{\mathfrak{M}}(G(I))]_n \neq (0)\}$$

により, $G(I)$ の a-不変量[7]（a-invariant）を表す。但し, $[\mathrm{H}^d_{\mathfrak{M}}(G(I))]_n$ は, 次数付き局所コホモロジー加群 $\mathrm{H}^d_{\mathfrak{M}}(G(I))$ の n 次斉次成分を表す。

定理 2.4 は, [50, Theorem (1.1)] において, 極大イデアルの場合に証明されたが, 同論文の [50, Remark (3.10)] において, 同様の議論により, $\mathfrak{m}$-準素イデアルの場合に拡張されることが言及されている。

例 2.5. $(A, \mathfrak{m})$ は Cohen-Macaulay 局所環, $d = \dim A \geq 1$ とする。A の巴系イデアル Q に対して, $\mathcal{R}(Q)$ は Cohen-Macaulay 環[8]である。

$\mathfrak{m}$-準素イデアル I に対して, $I^2 = QI$ を満たす巴系イデアル $Q \subseteq I$ が存在するならば

$$G(I) \text{ が Cohen-Macaulay 環 かつ } \mathrm{a}(G(I)) \leq 1 - d$$

が成り立つ。

例 2.6. $(A, \mathfrak{m})$ は 2 次元正則局所環, I は整閉な $\mathfrak{m}$-準素イデアルとすると, $\mathcal{R}(I)$ は Cohen-Macaulay 環である。実際, 無限体を通して, $A/\mathfrak{m} = \infty$ と仮定して良い ([50, Lemma (3.8)], [92, Lemma 8.4.2 (9)])。剰余体が無限である 2 次元正則局所環上の整閉な $\mathfrak{m}$-準素イデアルに対しては, J. Lipman-B. Tessier の定理 ([70, Proposition 5.5], [64, Theorem 5.1], [66, Theorem 3.1]) により, $I^2 = QI$ を満たす巴系イデアル $Q \subseteq I$ が存在する。故に, 定理 2.4 から, $\mathcal{R}(I)$ は Cohen-Macaulay 環となる。

以上, 定理 2.4 により, 具体的かつ豊富な Cohen-Macaulay Rees 代数の例を構成することが可能である。なお, 定理 2.4 において, Rees 代数 $\mathcal{R}(I)$ の構造が随伴次数環 $G(I)$ とその a-不変量の挙動により記述されることが見出され, 長期に渡って後の Rees 代数研究の指針の 1 つとなった。現在では, 定理 2.4 は次のように拡張されている。

定理 2.7 ([96, Theorem 7.1]). $(A, \mathfrak{m})$ は Cohen-Macaulay 局所環, $d = \dim A \geq 1$ とする。I $(\neq A)$ は A のイデアルであって, $\mathrm{ht}_A I > 0$ とする。このとき, 次の 2 条件は同値である。

(1) $\mathcal{R}(I)$ は Cohen-Macaulay 環である。

(2) $G(I)$ が Cohen-Macaulay 環であり, かつ $\mathrm{a}(G(I)) < 0$ である。

即ち, 定理 2.4 は, $\mathfrak{m}$-準素イデアルに限らず, $\mathrm{ht}_A I > 0$ であるイデアル I に対しても成立する。 併せて, 定理 2.4 は第 5 節で述べるように, 後藤-西田康二 ([47, Part II, Theorem (1.1)]) や D. Q. Viet ([101, Theorem 1.1]) によるイデアルの filtration に関する定理へと拡張される端緒を開いた。加えて, 基礎環 A が正則局所環である場合（より一般には pseudo-rational の場合）には, 常に $a(G(I)) < 0$ が成立するため,「$\mathcal{R}(I)$ の CM 性と $G(I)$ の CM 性は同値である」という Lipman の定理 ([69, Theoerm 5]) が直接的に導出される。なお, 論文 [50]

[7] [53, Definition (3.1.4)] を参照されたい。
[8] 例 1.5 からも従う。

では, 極大イデアル $\mathfrak{m}$ に関する Rees 代数が正則環, 完全交叉環となる特徴付けも与えられている ([50, Proposition (4.9), Corollary (4.10)])。

本節の最後に, Rees 代数 $\mathcal{R}(I)$ の Cohen-Macaulay 性と射影スキーム $\operatorname{Proj}\mathcal{R}(I)$ の Cohen-Macaulay 性の関連を考察する。ここで, $\operatorname{Proj}\mathcal{R}(I)$ が Cohen-Macaulay スキームであるとは, 任意の $\mathfrak{p} \in \operatorname{Proj}\mathcal{R}(I)$ に対して, 局所環 $\mathcal{R}(I)_{\mathfrak{p}}$ が Cohen-Macaulay 局所環であることをいう。

命題 2.8 ([99, Proposition 3.20])**.** $(A, \mathfrak{m})$ は Cohen-Macaulay 局所環, $d = \dim A \geq 1$ とする。I $(\neq A)$ は A のイデアルであって, $\operatorname{ht}_A I > 0$ とする。このとき, $\operatorname{Proj}\mathcal{R}(I)$ が Cohen-Macaulay であるための必要十分条件は, $\operatorname{Proj} G(I)$ が Cohen-Macaulay である。

注意 2.9 ([99, Remark 3.21]). 命題 2.8 の設定の下, 次の含意と同値性

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}(I) \text{ は Cohen-Macaulay} \quad &\Longrightarrow \quad G(I) \text{ は Cohen-Macaulay} \\
&\Longrightarrow \quad \operatorname{Proj}\mathcal{R}(I) \text{ は Cohen-Macaulay} \\
&\Longleftrightarrow \quad \operatorname{Proj} G(I) \text{ は Cohen-Macaulay}
\end{aligned}$$

が成り立つ。

3 Blow-up 代数の Gorenstein 性

本節では, blow-up 代数の Gorenstein 性について論じる。Cohen-Macaulay 性の場合と同様に, Gorenstein 性に関しても, [106, 第 4 節, 第 6 節] に詳しい記述がある。近年の進展については, [109] を参照されたい。Gorenstein 環の概念は, 1952 年の D. Gorenstein による平面曲線の研究 ([31]) に起源を持ち, その後, A. Grothendieck による双対性に関する理論の枠組みの中で整備され, 1963 年に H. Bass の自己入射次元による環論的特徴付けが確立された。Gorenstein 環の歴史的背景については, [65, 107] に詳しい。

以下, $(A, \mathfrak{m})$ は Noether 局所環とし, $d = \dim A$ とする。A-加群 M に対して, $\operatorname{id}_A M$ により, M の入射次元を表す。

定義 3.1 ([3, Theorem and definition])**.** A が Gorenstein 環であるとは, 自己入射次元が有限である, 即ち, $\operatorname{id}_A A < \infty$ が成り立つことである。

Noether 局所環 A が Gorenstein 環であるための必要十分条件は, A が Cohen-Macaulay 環であり, かつ $\mathrm{K}_A \cong A$ が成り立つこと[9]である。但し, K_A は A の正準加群を表す。局所コホモロジー加群を用いると, A の Gorenstein 性は A が Cohen-Macaulay 環であって, 次の同型

$$\mathrm{H}^d_{\mathfrak{m}}(A) \cong \mathrm{E}_A(A/\mathfrak{m})$$

が成り立つことで特徴付けられる。但し, $\mathrm{E}_A(A/\mathfrak{m})$ により, 剰余体 $A/\mathfrak{m}$ の入射包絡 (injective envelope, injective hull) を表す。Blow-up 代数の Gorenstein 性に目を向けると, Cohen-Macaulay 性に関する結果の類似として, 次の定理が成り立つ。

定理 3.2 ([50, Theorem (1.2)], [67, Corollary 3.7], [47, Part II, Corollary (1.4)])**.** $(A, \mathfrak{m})$ は Cohen-Macaulay 局所環, $d = \dim A \geq 2$ とし, I は A の $\mathfrak{m}$-準素イデアルとする。このとき, 次の 2 条件は同値である。

(1) $\mathcal{R}(I)$ が Gorenstein 環である。

(2) $G(I)$ が Gorenstein 環であり, かつ $\mathrm{a}(G(I)) = -2$ である。

[9] 正準加群 K_A が環 A の双対的な性質を持つことを鑑みるに, Gorenstein 環は対称性を備えた Cohen-Macaulay 環であると判断される。

上記の同値条件が成り立つとき, A は Gorenstein 環である。

定理 3.2 は, 定理 2.4 に合わせて $\mathfrak{m}$-準素イデアルの場合に限定して主張を述べたが, [67, Corollary 3.7], [47, Part II, Corollary (1.4)] に示されているように, 定理 3.2 の主張は, より一般のイデアルやイデアルの filtration に付随する blow-up 代数に対しても成立する。

例 3.3. $(A, \mathfrak{m})$ は Cohen-Macaulay 局所環, $d = \dim A \geq 2$ とする。例 2.5 により, A の巴系イデアル Q に対して, $\mathcal{R}(Q)$ は Cohen-Macaulay 環であった。このとき, $\mathcal{R}(Q)$ が Gorenstein 環であることと, A が Gorenstein 環かつ $d = 2$ であることは同値である。

例 3.4. $(A, \mathfrak{m})$ が 2 次元正則局所環の場合に, $\mathfrak{m}$-準素イデアル $I = \mathfrak{m}^\ell$ $(\ell \geq 1)$ を考えると, Zariski の定理 ([104, Part II, Section 12], [105, Appendix 5, Theorem 2'], [64, Theorem 3.7]) によって, I は整閉である。例 2.6 により, $\mathcal{R}(I)$ は Cohen-Macaulay 環である。このとき, $\mathcal{R}(I)$ が Gorenstein 環であるための必要十分条件は, $I = \mathfrak{m}$ である。

例 3.3 において, 基礎環の次元を 3 以上に取るか, 或いは例 3.4 において, $\ell \geq 2$ とすると, それらに伴い現れる Rees 代数はいずれも Gorenstein ではない Cohen-Macaulay 環となる。

4 Blow-up 代数の almost Gorenstein 性

Almost Gorenstein 環論の根底には,「何故 Gorenstein でない Cohen-Macaulay 環が, かくも多様かつ豊富に存在するのか」という素朴な疑問がある。Almost Gorenstein 環は, 1997 年に V. Barucci-R. Fröberg により, 解析的不分岐な 1 次元 Cohen-Macaulay 局所環[10]に対して導入された概念である ([2, Definition–Proposition 20])。その後, 2013 年に, 後藤-松岡直之-T. T. Phuong によって, 解析的不分岐を仮定しない 1 次元の Cohen-Macaulay 局所環へと枠組みが拡張された ([42, Definition 3.1])。2015 年には, これら 1 次元の理論を高次元へと拡張する定義が後藤-高橋亮-谷口直樹[11]によって導入され ([51, Definition 3.3]), 本節で扱う blow-up 代数をはじめとして, 行列式環 ([10, 93]), Stanley-Reisner 環 ([72]), 日比環 ([73]), 標準的次数付き環 ([51, 57]), 2 次元正規特異点 ([78]) 等, 多岐に渡るクラスの環に対して, almost Gorenstein 性が精緻に解析されてきた。なお, almost Gorenstein 性の基本的性質に関しては, [110] も併せて参照されたい。

近年, almost Gorenstein 環論を嚆矢として非 Gorenstein 環論が急速に展開されており, nearly Gorenstein 環 ([55]), semi-Gorenstein 環 ([51]), 2-almost Gorenstein 環 ([11]), generalized Gorenstein 環 ([40]), weakly almost Gorenstein 環 ([20]), far-flung Gorenstein 環 ([56]), canonical trace radical 環 ([74]), Goto 環 ([24]) 等, Gorenstein 性の一般化としての多様なクラスが提案され, 積極的に解析されている。このように非 Gorenstein 環論は, 現代可換環論における主要な研究潮流の 1 つを形成しつつある。以上の環のクラスを相関図に纏めると, 次のようになる。但し, CTR により, canonical trace radical 環を表し, min. multi. は極小重複度 (minimal multiplicity) を意味する。

$$\begin{tikzcd}
\text{CTR} & \text{nearly Gor} \arrow[l, Rightarrow] & \text{nearly Gor + min. multi.} \arrow[l, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \text{2-almost Gor} \arrow[dr, Rightarrow] & \\
 & \text{semi-Gor} \arrow[r, Rightarrow] & \text{almost Gor} \arrow[ul, Rightarrow, "\text{dim}=1"] \arrow[r, Rightarrow] \arrow[ur, dashed, leftrightarrow, "\text{“\textbf{twins}”}"] \arrow[dr, Rightarrow, "\text{dim}\leq 1"'] & \text{generalized Gor} \arrow[r, Rightarrow] & \text{Goto} \\
 & \text{far-flung Gor} & \text{nearly Gor + far-flung Gor} \arrow[l, Rightarrow] \arrow[u, Rightarrow, "\text{dim}=1"] & \text{weakly almost Gor} &
\end{tikzcd}$$

Blow-up 代数に着目すると, 例 3.3, 例 3.4 のように, 数多ある Cohen-Macaulay Rees 代数の中でも, Gorenstein 環は僅かであり, これら非 Gorenstein Rees 代数の中には, almost

[10]典型例として, 体上の数値半群環が挙げられる。
[11]2019 年 2 月に遠藤に改姓する。

Gorenstein 環となり得るものが含まれていて, 解明を待っていると推測される。この種の典型例に対して, almost Gorenstein 性を解析することは, almost Gorenstein 環の具体例を与えるに留まらず, その定義の妥当性を検証し, 理論の基盤を強固にする上でも重要な課題である。以上を踏まえ, 本節では, まず, [51] による almost Gorenstein 環の定義を紹介したい。

定義 4.1 ([51, Definition 3.3])**.** $(A, \mathfrak{m})$ は Cohen-Macaulay 局所環, $d = \dim A$ とし, 環 A は正準加群 K_A を持つと仮定する。このとき, A が almost Gorenstein 局所環であるとは, A-加群としての短完全列

$$0 \to A \to \mathrm{K}_A \to C \to 0$$

であって, 等式 $\mu_A(C) = \mathrm{e}^0_{\mathfrak{m}}(C)$ を満たすものが存在するこという。但し, $\mu_A(C)$ により A-加群 C の極小生成系の個数を表し, また $\mathrm{e}^0_{\mathfrak{m}}(C)$ は A-加群 C の $\mathfrak{m}$ に関する重複度を表す。即ち

$$\mathrm{e}^0_{\mathfrak{m}}(C) = \lim_{n\to\infty} (d-1)! \cdot \frac{\ell_A(C/\mathfrak{m}^{n+1}C)}{n^{d-1}}$$

である。

任意の Gorenstein 環は, 余核として零加群が取れるため, almost Gorenstein 環である。一方, その逆は基礎環 A が Artin 環であれば成り立つ ([51, Lemma 3.1 (3)])。定義 4.1 の意味するところは, almost Gorenstein 環 A は, 必ずしも Gorenstein 環であるとは限らないものの, 環 A は正準加群 K_A へ埋め込むことができ, その差分 K_A/A が「良い性質を備える」という点にある。今, 任意に A から K_A に単射が与えられているとし, その余核を C で表す。即ち, 次の A-加群としての短完全列

$$0 \to A \to \mathrm{K}_A \to C \to 0$$

を考える。$C \neq (0)$ の場合, A-加群 C は Cohen-Macaulay であって, $\dim_A C = d-1$ である ([51, Lemma 3.1 (2)])。剰余体 $A/\mathfrak{m}$ が無限体であると仮定し, 局所環 $A_1 = A/[(0) :_A C]$ を見ると, A_1 の剰余体も無限であるので, 元 $f_1, f_2, \ldots, f_{d-1} \in \mathfrak{m}$ であって, $(f_1, f_2, \ldots, f_{d-1})A_1$ が A_1 の極大イデアル $\mathfrak{m}_1$ の極小節減を成すものを選ぶことができる。従って, 次の不等式

$$\mathrm{e}^0_{\mathfrak{m}}(C) = \mathrm{e}^0_{\mathfrak{m}_1}(C) = \ell_A(C/(f_1, f_2, \ldots, f_{d-1})C) \geq \ell_A(C/\mathfrak{m}C) = \mu_A(C)$$

が得られる。以上より, $\mathrm{e}^0_{\mathfrak{m}}(C) \geq \mu_A(C)$ である。ここで, 等号 $\mathrm{e}^0_{\mathfrak{m}}(C) = \mu_A(C)$ が成り立つとき, C を Ulrich A-加群と呼ぶ。従って, 剰余体 $A/\mathfrak{m}$ が無限体である場合, C が Ulrich A-加群であることと

$$\mathfrak{m}C = (f_1, f_2, \ldots, f_{d-1})C$$

が成り立つことは同値である。特に, 環 A が 1 次元の場合, A-加群 C が Ulrich である必要十分条件は, C が剰余体 $A/\mathfrak{m}$ 上のベクトル空間である。このように, almost Gorenstein 環は, 同型 $\mathrm{K}_A \cong A$ が成り立つとは限らないが, その差 C がベクトル空間 (とその一般化である Ulrich 加群) という「良い性質を備える」ことを意味している。

Almost Gorenstein 環の具体例は数多く存在する ([9, 30, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 48, 51, 52, 57, 72, 73, 93])。とりわけ重要な例としては, 2 次元有理特異点や有限表現型 1 次元 Cohen-Macaulay 局所環が挙げられる。なお, almost Gorenstein 環論の根底に数値半群環の理論があることから, almost Gorenstein となる数値半群環の例も非常に豊富である ([2, 42])。

次に, 次数環に対する almost Gorenstein 性の定義を紹介する。実は, Cohen-Macaulay 性, Gorenstein 性と異なり, almost Gorenstein 性は次数環と局所環の間に若干の差異が生じる。

定義 4.2 ([51, Definition 8.1])**.** $R = \bigoplus_{n \geq 0} R_n$ は Cohen-Macaulay 次数環, $d = \dim R$ とする。$(R_0, \mathfrak{m})$ は局所環とし, 環 R は次数付き正準加群 K_R を持つと仮定する。このとき, R が almost Gorenstein 次数環であるとは, 次数 R-加群としての短完全列

$$0 \to R \to \mathrm{K}_R(-a) \to C \to 0$$

であって, 等式 $\mu_R(C) = \mathrm{e}^0_{\mathfrak{M}}(C)$ を満たすものが存在するこという。但し, $a = \mathrm{a}(R)$ により, R の a-不変量[12]を表し, $\mathfrak{M} = \mathfrak{m}R + R_+$ は R の次数付き極大イデアルである。なお, $\mathrm{K}_R(-a)$ は R-加群としては K_R と同一であるが, $[\mathrm{K}_R(-a)]_n = [\mathrm{K}_R]_{n-a}$ $(n \in \mathbb{Z})$ という次数付けを持つ次数付き R-加群を表す。

局所環の場合と同様に, 任意の Gorenstein 次数環は almost Gorenstein である。また, $C_{\mathfrak{M}}$ は Ulrich $R_{\mathfrak{M}}$-加群であり, 正準加群 K_R は局所化と可換であるため, R が次数環として almost Gorenstein であれば, 局所環 $R_{\mathfrak{M}}$ も almost Gorenstein となる。もっとも, 一般にはその逆は成立しない ([44, Theorems 2.7, 2.8], [51, Example 8.8]) が, 次の例が示すように, almost Gorenstein 環は次数付き環として見た場合にも, 魅力的な性質を備えている。

例 4.3 ([51, Example 10.5], [93, Theorem 1.1])**.** 無限体 k 上の不定元を成分に持つ $m \times n$ 行列 $X = [X_{ij}]$ $(2 \leq t \leq \min\{m, n\})$ に対して, k 上の多項式環を $S = k[X] = k[X_{ij} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n]$ により表し, 行列式環 $R = S/\mathrm{I}_t(X)$ を考える。但し, $\mathrm{I}_t(X)$ は行列 X の t 次小行列式全体が生成する S のイデアルを表す。Hochster-J. A. Eagon ([58, Theorem 2, Corollary], [6, Theorem 7.3.1 (c)]) により, R は Cohen-Macaulay 整閉整域, $\dim R = mn - (m - (t-1))(n - (t-1))$ である。また, 行列式環 R が Gorenstein であるための必要十分条件は, $m = n$ で与えられる ([91, Theorem (5.5.6)], [6, Theorem 7.3.6 (b)])。このとき, 次の 2 条件は同値である。

(1) $R = k[X]/\mathrm{I}_t(X)$ は almost Gorenstein 次数環である。

(2) $m = n$ であるか, または $m \neq n$ かつ $t = \min\{m, n\} = 2$ である。

例 4.4 ([51, Example 10.8])**.** 無限体 k 上の多項式環 $R = k[X_1, X_2, \ldots, X_d]$ $(d \geq 1)$ と整数 $n \geq 1$ に対して, Veronese 部分環 $R^{(n)} = k[R_n]$ を考える。$R^{(n)}$ は R の純 (pure) 部分環なので, Cohen-Macaulay 環である ([108, 注意 7.7, 補題 7.7])。特に, $R^{(n)}$ が Gorenstein 環であることと, $d = 1$ または $n \mid d$ が成り立つことは同値である ([32, Examples (1)])。このとき, 次の主張が成り立つ。

(1) $d \leq 2$ の場合, $R^{(n)}$ は almost Gorenstein 次数環である ([51, Corollary 10.6])。

(2) $d \geq 3$ の場合, $R^{(n)}$ が almost Gorenstein 次数環であるための必要十分条件は, $n \mid d$ または $d = 3$ かつ $n = 2$ である。

以上の準備の下, blow-up 代数の almost Gorenstein 性に関する結果を紹介する。

定理 4.5 ([51, Theorem 8.3], [43, Theorem 1.3], [48, Theorem 1.3])**.** $(A, \mathfrak{m})$ は Cohen-Macaulay 局所環, $d = \dim A \geq 3$ とし, 環 A は Gorenstein 環の準同型像とする。A の部分巴系 $a_1, a_2, \ldots, a_r \in \mathfrak{m}$ $(3 \leq r \leq d)$ に対して, $Q = (a_1, a_2, \ldots, a_r)$ とおくと, 次の 2 条件は同値である。

(1) $\mathcal{R}(Q)$ は almost Gorenstein 次数環である。

(2) A は正則局所環であり, かつ $a_1, a_2, \ldots, a_r$ は A の正則巴系の一部である。

[12] 即ち, $\mathrm{a}(R) = \max\{n \in \mathbb{Z} \mid [\mathrm{H}^d_{\mathfrak{M}}(R)]_n \neq 0\} = -\min\{n \in \mathbb{Z} \mid [\mathrm{K}_R]_n \neq 0\}$ である。

定理 4.5 は, [51, Theorem 8.3] において, [39] による canonical filtration の理論を駆使し, 基礎環 A が Gorenstein 環であり, Q が巴系イデアルである場合に証明された。続いて, [43, Theorem 1.3] において, Eagon-Northcott 複体を用いて極小自由分解の構造を解析し, 部分巴系で生成されるイデアルの場合へと拡張された。さらに, [48, Theorem 1.3] では, 基礎環に課す仮定が Gorenstein 性から Cohen-Macaulay 性へと緩和され, 上記の形で定理 4.5 が得られている。一方で, 定理 4.5 に関連する次の予想は依然として未解決である。

予想 4.6 ([48, Conjecture 1.4])**.** $(A, \mathfrak{m})$ は Cohen-Macaulay 局所環とし, Gorenstein 環の準同型像とする。I $(\neq A)$ は環 A のイデアルであって, $\mathrm{ht}_A I \geq 3$ とする。このとき, Rees 代数 $\mathcal{R}(I)$ が almost Gorenstein 次数環ならば, A は Gorenstein 環である。

定理 4.5 に対して, Rees 代数の次数付き極大イデアルによる局所化の局所環としての almost Gorenstein 性は次のように特徴付けられる。

定理 4.7 ([43, Theorem 1.3])**.** $(A, \mathfrak{m})$ は Gorenstein 局所環とし, $d = \dim A \geq 3$ とする。A の部分巴系 $a_1, a_2, \ldots, a_r \in \mathfrak{m}$ $(3 \leq r \leq d)$ に対して, $Q = (a_1, a_2, \ldots, a_r)$ とおくと, 次の 2 条件は同値である。

(1) $\mathcal{R}(Q)_{\mathfrak{M}}$ は almost Gorenstein 局所環である。

(2) A は正則局所環である。

但し, $\mathfrak{M} = \mathfrak{m}\mathcal{R}(Q) + \mathcal{R}(Q)_+$ により, $\mathcal{R}(Q)$ の次数付き極大イデアルを表す。

定理 4.5 と定理 4.7 により, 局所環 $\mathcal{R}(Q)_{\mathfrak{M}}$ が almost Gorenstein であっても, 次数環 $\mathcal{R}(Q)$ が almost Gorenstein とは限らないことが従う。また, これらの結果において, 基礎環の次元は 3 以上と仮定しているが, 2 次元の場合は次のようになる。

注意 4.8 ([43, Proposition 2.10]). $(A, \mathfrak{m})$ は Cohen-Macaulay 局所環, $\dim A = 2$ とする。A の巴系イデアル Q に対して, 次の 3 条件は同値である。

(1) $\mathcal{R}(Q)$ は Gorenstein 環である。

(2) A は Gorenstein 環である。

(3) $\mathcal{R}(Q)_{\mathfrak{M}}$ は almost Gorenstein 局所環である。

次に, 例 2.5 と例 3.4 を鑑み, 2 次元正則局所環 $(A, \mathfrak{m})$ 上の整閉な $\mathfrak{m}$-準素イデアルの Rees 代数を考察する。

定理 4.9 ([44, Theorem 1.3])**.** $(A, \mathfrak{m})$ は 2 次元正則局所環であり, 剰余体 $A/\mathfrak{m}$ は無限とする。任意の整閉な $\mathfrak{m}$-準素イデアル I に対して, $\mathcal{R}(I)$ は almost Gorenstein 次数環である。

定理 4.9 の証明の鍵は, J. Verma による joint reduction number が 0 であるような joint reduction の存在性にある ([100, Theorem 2.1])。加えて, Zariski の定理 ([104, Part II, Section 12], [105, Appendix 5, Theorem 2'], [64, Theorem 3.7]) により, 2 次元正則局所環上の極大イデアルの冪は整閉である。従って, 定理 4.9 から次の系が直ちに得られる。

系 4.10 ([44, Corollary 1.4])**.** $(A, \mathfrak{m})$ は 2 次元正則局所環であり, 剰余体 $A/\mathfrak{m}$ は無限とする。任意の $\ell \geq 1$ に対して, $\mathcal{R}(\mathfrak{m}^\ell)$ は almost Gorenstein 次数環である。

続いて, 定理 4.9 の拡張可能性を考察したい。定義の紹介から始める。

定義 4.11 ([76, Definition 3.2], [77, Theorem 1.1])**.** $(A, \mathfrak{m})$ は 2 次元優秀正規局所環とし, 剰余体 $A/\mathfrak{m}$ は代数閉体と仮定する。A の $\mathfrak{m}$-準素イデアル I が p_g イデアルであるとは, Rees 代数 $\mathcal{R}(I)$ が Cohen-Macaulay 正規整域であることをいう。

剰余体が代数閉体である 2 次元優秀正則局所環 $(A, \mathfrak{m})$ 上では, 任意の整閉な $\mathfrak{m}$-準素イデアルは p_g イデアルであるので, 次の定理は定理 4.9 の 1 つの拡張である。

定理 4.12 ([46, Theorem 1.3])**.** $(A, \mathfrak{m})$ は 2 次元優秀 Gorenstein 正規局所環とし, 剰余体 $A/\mathfrak{m}$ は代数閉体であると仮定する。任意の p_g イデアル I に対して, $\mathcal{R}(I)$ は almost Gorenstein 次数環である。

また, 系 4.10 の拡張として, 次の定理が得られる。

定理 4.13 ([46, Theorem 1.4])**.** $(A, \mathfrak{m})$ は 2 次元 almost Gorenstein 局所環であり, 極小重複度を持つと仮定する。任意の $\ell \geq 1$ に対して, $\mathcal{R}(\mathfrak{m}^\ell)$ は almost Gorenstein 次数環である。

系 4.14 ([46, Corollary 1.5])**.** $(A, \mathfrak{m})$ は 2 次元有理特異点とする。任意の $\ell \geq 1$ に対して, $\mathcal{R}(\mathfrak{m}^\ell)$ は almost Gorenstein 次数環である。

系 4.10 の高次元化としては, 次の定理が成り立つ。

定理 4.15 ([46, Theorem 1.6])**.** $(A, \mathfrak{m})$ は正則局所環, $d = \dim A \geq 2$ とし, 剰余体 $A/\mathfrak{m}$ は無限とする。次の主張が成り立つ。

(1) $\mathcal{R}(\mathfrak{m}^\ell)$ が almost Gorenstein 次数環であるための必要十分条件は, $\ell = 1$ かつ $d = 2$, または $\ell = d - 1$ である。

(2) $\ell \geq 2$, $d \geq 3$ の場合, $\mathcal{R}(\mathfrak{m}^\ell)_{\mathfrak{M}}$ が almost Gorenstein 局所環であるための必要十分条件は, $\ell \mid d - 1$ である。

但し, $\mathfrak{M} = \mathfrak{m}\mathcal{R}(\mathfrak{m}^\ell) + \mathcal{R}(\mathfrak{m}^\ell)_+$ により, $\mathcal{R}(\mathfrak{m}^\ell)$ の次数付き極大イデアルを表す。

特に, $\ell = 2$, $d = 5$ の場合, $\mathcal{R}(\mathfrak{m}^2)_{\mathfrak{M}}$ は almost Gorenstein 局所環であるが, 次数環として $\mathcal{R}(\mathfrak{m}^2)$ は almost Gorenstein ではない。

注意 4.16. 定理 4.15 の設定の下, $\ell = 1$ の場合, 定理 4.5 により, $\mathcal{R}(\mathfrak{m}^\ell) = \mathcal{R}(\mathfrak{m})$ は almost Gorenstein 次数環である。$d = 2$ の場合, 系 4.10 から, $\mathcal{R}(\mathfrak{m}^\ell)$ は almost Gorenstein 次数環である。加えて, $\ell = d - 1$ の場合, $\mathcal{R}(\mathfrak{m}^\ell)$ は Gorenstein 環である ([43, Proposition 2.3])。

本節の最後に, 随伴次数環の almost Gorenstein 性に関する結果を紹介する。ここで, Cohen-Macaulay 環 R に対して, $\mathrm{r}(R)$ により, R の Cohen-Macaulay 型を表す。

定理 4.17 ([51, Theorem 9.1])**.** $(A, \mathfrak{m})$ は Cohen-Macaulay 局所環であり, 剰余体 $A/\mathfrak{m}$ は無限とする。環 A は正準加群 K_A を持つと仮定する。A の $\mathfrak{m}$-準素イデアル I に対して, 随伴次数環 $G(I)$ が almost Gorenstein 次数環であり, $\mathrm{r}(G(I)) = \mathrm{r}(A)$ が成り立つならば, A は almost Gorenstein 局所環である。

定理 4.17 の証明は, 次元に関する数学的帰納法による。1 次元の場合は, canonical filtration を用い, 2 次元以上の場合は, 適切に上表元を選ぶことにより証明される。

5 Blow-up 代数の系列的 Cohen-Macaulay 性

加群の系列的 Cohen-Macaulay 性は, Cohen-Macaulay 性の拡張概念の 1 つであり, 元々, 次数環上の加群に対して, 1983 年に R. P. Stanley によって定義された概念である ([86, 2.9 Definition])。局所環上の加群に対する定義は, 1998 年, P. Schenzel により, Cohen-Macaulay filtered module という名称の下で導入された ([81, Definition 4.1])。系列的 Cohen-Macaulay 加群という用語が局所環上の加群に対して明示的に定義されたのは, 2003 年の [18, Definition

4.2] である。系列的 Cohen-Macaulay 加群の基本的性質に関しては, [16, 17, 38, 94, 95] 等を参照されたい。

以下, 特に断らない限り, 本節では, A は Noether 環, $M \neq (0)$ は有限生成 A-加群とし, $s = \dim_A M < \infty$ と仮定する。任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して, $\dim_A N \leq n$ を満たす最大の M の A-部分加群 N を M_n と表す。集合 $\mathcal{S}(M) = \{\dim_A N \mid N \text{ は } M \text{ の } A\text{-部分加群}, N \neq (0)\}$ を考えると, 等式

$$\mathcal{S}(M) = \{\dim A/\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_A M\}$$

が成り立つ。$\ell = \#\mathcal{S}(M)$ とおき

$$\mathcal{S}(M) = \{d_1 < d_2 < \cdots < d_\ell = s\}$$

と表す。各 $1 \leq i \leq \ell$ に対して, $D_i = M_{d_i}$ とおくと, 次の M の A-部分加群の列

$$D_0 := (0) \subsetneq D_1 \subsetneq D_2 \subsetneq \cdots \subsetneq D_\ell = M$$

が得られる。これを M の dimension filtration という。各 $1 \leq i \leq \ell$ に対して, $C_i = D_i/D_{i-1}$ と定める。すると, $\dim_A D_i = \dim_A C_i = d_i$ が成り立つ。

定義 5.1 ([86, 2.9 Definition], [81, Definition 4.1])**.** A-加群 M が系列的 Cohen-Macaulay A-加群であるとは, 任意の $1 \leq i \leq \ell$ に対して, 剰余加群 C_i が Cohen-Macaulay A-加群であることをいう。Noether 環 A が系列的 Cohen-Macaulay 環であるとは, $\dim A < \infty$ であり, かつ A 自身が系列的 Cohen-Macaulay A-加群であることをいう。

例 5.2. $(A, \mathfrak{m})$ は Noether 局所環, $M \neq (0)$ は有限生成 A-加群とする。次の主張が成り立つ。

(1) $\dim_A M = 1$ ならば, M は系列的 Cohen-Macaulay A-加群である。

(2) M が Cohen-Macaulay A-加群ならば, M は系列的 Cohen-Macaulay A-加群である。A-加群 M が unmixed[13]ならば, 逆も正しい。

(3) 整数 $n \geq 1$ に対して, M_i が Cohen-Macaulay A-加群 $(1 \leq i \leq n)$ ならば, $\bigoplus_{i=1}^n M_i$ は系列的 Cohen-Macaulay A-加群である ([95, Proposition 3.2])。

(4) A 上 M のイデアル化 $A \ltimes M$[14]が系列的 Cohen-Macaulay 環であるための必要十分条件は, A が系列的 Cohen-Macaulay 環であり, かつ M が系列的 Cohen-Macaulay A-加群である ([95, Theorem 1.2])。

(5) 自己同型群 $\mathrm{Aut}\, A$ の有限部分群 G に対して, $\#G$ は A の単元とする。このとき, A が系列的 Cohen-Macaulay 環ならば, 不変式環 A^G は系列的 Cohen-Macaulay 環である ([95, Corollary 3.7])。

例 5.3 ([86, pages 86–87])**.** k は体とする。単体的複体 Δ に付随する Stanley-Reisner 環 $k[\Delta]$ に対して, Δ が shellable ならば, $k[\Delta]$ は系列的 Cohen-Macaulay 環である。

注意 5.4. 単体的複体 Δ が shellable であることの定義には, Δ が pure であることを仮定する流儀がある ([6, Definition 5.1.11])。このとき, 付随する Stanley-Reisner 環 $k[\Delta]$ は Cohen-Macaulay 環となる ([6, Theorem 5.1.13])。一方で, pure であることを要請しない shellable の定義もあり ([4, 2.1 Definition]), その場合には, $k[\Delta]$ は系列的 Cohen-Macaulay 環となる。

命題 5.5 ([94, Proposition 2.2])**.** $(A, \mathfrak{m})$ は Noether 局所環, $M \neq (0)$ は有限生成 A-加群とする。$x \in \mathfrak{m}$ は M-非零因子とする。次の 2 条件は同値である。

[13] $\widehat{A}$, $\widehat{M}$ により, 環 A と加群 M の $\mathfrak{m}$-進完備化を表すとき, 等式 $\mathrm{Ass}_{\widehat{A}} \widehat{M} = \mathrm{Assh}_{\widehat{A}} \widehat{M}$ が成り立つことである。
[14] イデアル化の基本的性質に関しては, [108, 1.86] を参照されたい。

(1) M は系列的 Cohen-Macaulay A-加群である。

(2) M/xM は系列的 Cohen-Macaulay A/xA-加群であり, かつ $\{D_i/xD_i\}_{0\le i\le \ell}$ は M/xM の dimension filtration である。

注意 5.6. 命題 5.5 (2) $\Rightarrow$ (1) において, $\{D_i/xD_i\}_{0\le i\le \ell}$ が M/xM の dimension filtration であるという仮定は不可欠である。実際, A は 2 次元 Noether 局所整域, $\operatorname{depth} A = 1$ とする[15]。任意の $0 \ne x \in A$ に対して, A/xA は系列的 Cohen-Macaulay であるが, A は系列的 Cohen-Macaulay ではない。

以上を踏まえて, blow-up 代数の系列的 Cohen-Macaulay 性を考察する。鍵となる着想は, filtration に付随する blow-up 代数へと枠組みを拡張することである。

定義 5.7 (イデアルの filtration に付随する blow-up 代数). 環 A のイデアルの族 $\mathcal{F} = \{F_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ が A のイデアルの filtration であるとは, 次の 3 条件

(1) 任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して, $F_n \supseteq F_{n+1}$

(2) 任意の $m, n \in \mathbb{Z}$ に対して, $F_mF_n \subseteq F_{m+n}$

(3) $F_0 = A$

を満たすことである[16]。環 A のイデアルの filtration $\mathcal{F} = \{F_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ に付随して, 次数環

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\mathcal{F}) &= \sum_{n\ge 0} F_nt^n \subseteq A[t] \\ \mathcal{R}'(\mathcal{F}) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} F_nt^n \subseteq A[t, t^{-1}] \\ G(\mathcal{F}) &= \mathcal{R}'(\mathcal{F})/t^{-1}\mathcal{R}'(\mathcal{F}) \end{aligned}$$

が定まり, それぞれ $\mathcal{F}$ の Rees 代数, 拡大 Rees 代数, 随伴次数環と呼ぶ。但し, t により, A 上の不定元を表す。すると, $\mathcal{R}(\mathcal{F}) \cong \bigoplus_{n\ge 0} F_n$, $\mathcal{R}'(\mathcal{F}) \cong \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} F_n$ であって, $G(\mathcal{F}) \cong \bigoplus_{n\ge 0} F_n/F_{n+1}$ が成り立つ。

注意 5.8. 環 A のイデアルの filtration $\mathcal{F} = \{F_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ に対して, $F_1 = A$ であることと, $G(\mathcal{F})$ が零環であることは同値である。

例 5.9. 次に挙げるイデアル F_n による族 $\mathcal{F} = \{F_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ がイデアルの filtration の例である。

(1) A のイデアル I に対して, $F_n = I^n$ (イデアルの冪)

(2) $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ に対して, $F_n = \mathfrak{p}^{(n)} = \mathfrak{p}^nA_{\mathfrak{p}} \cap A$ (素イデアルのシンボリック冪)

(3) A のイデアル I に対して, $F_n = \overline{I^n}$ (イデアルの冪の整閉包)

(4) A のイデアル I に対して, $F_n = \widetilde{I^n}$ (イデアルの冪の Ratliff-Rush 閉包)

(5) 次数環 $R = \bigoplus_{n\ge 0} R_n$ のとき, $F_n = \sum_{k\ge n} R_k$

定義 5.7 と同様に, 環 A のイデアルの filtration に基づく A-部分加群の filtration を次のように導入する。

[15] 例えば, Nagata's bad example [75, Appendix A1] がある。

[16] (1) は随伴次数環 $G(\mathcal{F})$ を考える上で不可欠な条件であり, (2) は blow-up 代数に環構造を入れるための条件である。(3) は, 任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して $F_n = (0)$ という自明な filtration を排除し, また blow-up 代数を A-代数とみなすために課されている。

定義 5.10. $\mathcal{F} = \{F_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ は環 A のイデアルの filtration とする。M は A-加群とする。M の A-部分加群の族 $\mathcal{M} = \{M_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ が M の A-部分加群の $\mathcal{F}$-filtration であるとは, 次の 3 条件

(1) 任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して, $M_n \supseteq M_{n+1}$

(2) 任意の $m, n \in \mathbb{Z}$ に対して, $F_m M_n \subseteq M_{m+n}$

(3) $M_0 = M$

を満たすことである。A-加群 M の A-部分加群の $\mathcal{F}$-filtration に対して

$$\mathcal{R}(\mathcal{M}) = \sum_{n\geq 0} t^n \otimes M_n \subseteq A[t] \otimes_A M$$
$$\mathcal{R}'(\mathcal{M}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} t^n \otimes M_n \subseteq A[t, t^{-1}] \otimes_A M$$
$$G(\mathcal{M}) = \mathcal{R}'(\mathcal{M})/t^{-1}\mathcal{R}'(\mathcal{M})$$

と定め, それぞれ $\mathcal{M}$ の Rees 加群, 拡大 Rees 加群, 随伴次数加群という。但し, t は A 上の不定元とし, 任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して, $t^n \otimes M_n = \{t^n \otimes x \mid x \in M_n\} \subseteq A[t, t^{-1}] \otimes_A M$ とする。

定義 5.7, 定義 5.10 により, $\mathcal{R}(\mathcal{M})$ は次数 $\mathcal{R}(\mathcal{F})$-加群, $\mathcal{R}'(\mathcal{M})$ は次数 $\mathcal{R}'(\mathcal{F})$-加群であって, $F_1 \neq A$ である場合には, $\mathcal{G}(\mathcal{M})$ は次数 $G(\mathcal{F})$-加群である。なお, 任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して, A-加群としての同型 $t^n \otimes M_n \cong M_n$ を踏まえると

$$\mathcal{R}(\mathcal{M}) \cong \bigoplus_{n\geq 0} M_n, \quad \mathcal{R}'(\mathcal{M}) \cong \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} M_n, \quad G(\mathcal{M}) \cong \bigoplus_{n\geq 0} M_n/M_{n+1}$$

が成り立つ。以下, 本節においては, 次の設定の下に議論を進める。

設定 5.11. $(A, \mathfrak{m})$ は Noether 局所環とし, $M \neq (0)$ は有限生成 A-加群とする。$\mathcal{F} = \{F_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ により A のイデアルの filtration を表し, $\mathcal{M} = \{M_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ は M の A-部分加群の $\mathcal{F}$-filtration とする。さらに, $F_1 \neq A$ であり, $\mathcal{R}(\mathcal{F})$ は Noether 環であって, $\mathcal{R}(\mathcal{M})$ は有限生成 $\mathcal{R}(\mathcal{F})$-加群と仮定する。$\mathfrak{M} = \mathfrak{m}\mathcal{R}(\mathcal{F}) + \mathcal{R}(\mathcal{F})_+$ により, $\mathcal{R}(\mathcal{F})$ の次数付き極大イデアルを表す。

定理 5.12 ([94, Corollary 2.4, Proposition 2.5 (3), Corollary 2.6])**.** 次の主張が成り立つ。

(1) $\dim_{\mathcal{R}(\mathcal{F})} \mathcal{R}(\mathcal{M}) = \begin{cases} \dim_A M + 1 & (\exists\, \mathfrak{p} \in \operatorname{Assh}_A M \text{ s.t. } F_1 \not\subseteq \mathfrak{p}) \\ \dim_A M & (\text{その他}) \end{cases}$

(2) $\dim_{\mathcal{R}'(\mathcal{F})} \mathcal{R}'(\mathcal{M}) = \dim_A M + 1$

(3) $\dim_{G(\mathcal{F})} G(\mathcal{M}) = \dim_A M$

但し, $\operatorname{Assh}_A M = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp}_A M \mid \dim A/\mathfrak{p} = \dim_A M\}$ である。

ここで, 有限生成次数 $\mathcal{R}(\mathcal{F})$-加群 N, $\dim_{\mathcal{R}(\mathcal{F})} N = t$ に対して

$$\mathrm{a}(N) = \max\{n \in \mathbb{Z} \mid [\mathrm{H}^t_{\mathfrak{M}}(N)]_n \neq (0)\}$$

と定め, N の a-不変量[17]と呼ぶ。次の定理で述べるように, Rees 代数の Cohen-Macaulay 性に関する後藤-下田の定理 (定理 2.4) は, イデアルや加群の filtration に対しても成立する。

定理 5.13 ([47, Part II, Theorem (1.1)], [94, Theorem 3.8], [101, Theorem 1.1])**.** M は Cohen-Macaulay A-加群とする。次の 2 条件は同値である。

[17][53, Definition (3.1.4)] を参照されたい。

(1) $\mathcal{R}(\mathcal{M})$ は Cohen-Macaulay $\mathcal{R}(\mathcal{F})$-加群であり, かつ $\dim_{\mathcal{R}(\mathcal{F})} \mathcal{R}(\mathcal{M}) = d+1$ である。

(2) $G(\mathcal{M})$ は Cohen-Macaulay $G(\mathcal{F})$-加群であり, かつ $\mathrm{a}(G(\mathcal{M})) < 0$ である。

定理 5.13 は, 1990 年代に後藤-西田, 及び Viet により, イデアルの filtration に基づく blow-up 代数に対して証明され, その後 2018 年に, 谷口-Phuong-N. T. Dung-T. N. An により加群の filtration の場合へと拡張された。続いて, このような filtration から構成される blow-up 代数の系列的 Cohen-Macaulay 性について考察する。

設定 5.11 の下, M の dimension filtration $\{D_i\}_{0 \le i \le \ell}$ を取り, 各 $1 \le i \le \ell$ に対し, $C_i = D_i/D_{i-1}$ とおく。ここで

$$\mathcal{D}_i = \{M_n \cap D_i\}_{n \in \mathbb{Z}}, \quad \mathcal{C}_i = \{[(M_n \cap D_i) + D_{i-1}]/D_{i-1}\}_{n \in \mathbb{Z}}.$$

を考えると, $\mathcal{D}_i$ と $\mathcal{C}_i$ はそれぞれ D_i, C_i の A-部分加群の $\mathcal{F}$-filtration である。任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して, A-加群としての短完全列

$$0 \to [\mathcal{D}_{i-1}]_n \to [\mathcal{D}_i]_n \to [\mathcal{C}_i]_n \to 0$$

から, 次数 $\mathcal{R}(\mathcal{F})$-加群としての短完全列が導出される。

$$0 \to \mathcal{R}(\mathcal{D}_{i-1}) \to \mathcal{R}(\mathcal{D}_i) \to \mathcal{R}(\mathcal{C}_i) \to 0$$
$$0 \to \mathcal{R}'(\mathcal{D}_{i-1}) \to \mathcal{R}'(\mathcal{D}_i) \to \mathcal{R}'(\mathcal{C}_i) \to 0$$
$$0 \to G(\mathcal{D}_{i-1}) \to G(\mathcal{D}_i) \to G(\mathcal{C}_i) \to 0$$

補題 5.14 ([17, Proposition 5.1], [94, Lemma 3.1])**.** 次の主張が成り立つ。

(1) $\{\mathcal{R}'(\mathcal{D}_i)\}_{0 \le i \le \ell}$ は $\mathcal{R}'(\mathcal{M})$ の dimension filtration である。

(2) 任意の $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_A M$ に対して, $F_1 \not\subseteq \mathfrak{p}$ と仮定すると, $\{\mathcal{R}(\mathcal{D}_i)\}_{0 \le i \le \ell}$ は $\mathcal{R}(\mathcal{M})$ の dimension filtration である。

以上の準備の下, 次の定理が成り立つ。特に, 定理 5.16 は, 後藤-下田の定理の系列的 Cohen-Macaulay 性への一般化である。

定理 5.15 ([17, Theorem 5.2], [94, Theorem 1.1])**.** 次の 2 条件は同値である。

(1) $\mathcal{R}'(\mathcal{M})$ は系列的 Cohen-Macaulay $\mathcal{R}'(\mathcal{F})$-加群である。

(2) $G(\mathcal{M})$ は系列的 Cohen-Macaulay $G(\mathcal{F})$-加群であり, かつ $\{G(\mathcal{D}_i)\}_{0 \le i \le \ell}$ は $G(\mathcal{M})$ の dimension filtration である。

上記の同値条件が成り立つとき, M は系列的 Cohen-Macaulay A-加群である。

定理 5.16 ([17, Theorem 5.3], [94, Theorem 1.2])**.** M は系列的 Cohen-Macaulay A-加群とし, 任意の $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_A M$ に対して, $F_1 \not\subseteq \mathfrak{p}$ と仮定する。次の 2 条件は同値である。

(1) $\mathcal{R}(\mathcal{M})$ は系列的 Cohen-Macaulay $\mathcal{R}(\mathcal{F})$-加群である。

(2) $G(\mathcal{M})$ は系列的 Cohen-Macaulay $G(\mathcal{F})$-加群, $\{G(\mathcal{D}_i)\}_{0 \le i \le \ell}$ は $G(\mathcal{M})$ の dimension filtration であって, 任意の $1 \le i \le \ell$ に対して, $\mathrm{a}(G(\mathcal{C}_i)) < 0$ である。

上記の同値条件が成り立つとき, $\mathcal{R}'(\mathcal{M})$ は系列的 Cohen-Macaulay $\mathcal{R}'(\mathcal{F})$-加群である。

本節の最後に, 定理 5.15, 定理 5.16 の Stanley-Reisner 環への応用を論じる。

設定 5.17. Δ は $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ $(n > 0)$ を頂点集合とする単体的複体で, $\Delta \neq \emptyset$ とする。$\mathcal{F}(\Delta)$ により, Δ の facet 全体の集合を表し, $m = \#\mathcal{F}(\Delta)$ とおく。体 k 上の多項式環 $S = k[X_1, X_2, \ldots, X_n]$ 内において, イデアル $I_\Delta = (X_{i_1} X_{i_2} \cdots X_{i_r} \mid \{i_1 < i_2 < \cdots < i_r\} \notin \Delta)$ を考える。単体的複体 Δ に付随する Stanley-Reisner 環

$$R = k[\Delta] = S/I_\Delta$$

を $\mathbb{Z}$-次数環 $R = \sum_{n \geq 0} R_n$ とみなし, 各 $n \in \mathbb{Z}$ に対して $I_n = \sum_{k \geq n} R_k$ とおくと, $I_n = \mathfrak{m}^n$ となる。但し, $\mathfrak{m} = R_+ = \sum_{n > 0} R_n$ は R の次数付き極大イデアルである。

定義 5.18 ([4, 2.1 Definition]). 単体的複体 Δ が shellable[18]であるとは, $m = 1$ または, $m \geq 2$ であって, 次の 3 条件

(1) $\mathcal{F}(\Delta) = \{F_1, F_2, \ldots, F_m\}$

(2) 任意の $2 \leq i \leq m$ に対して, $\langle F_1, F_2, \ldots, F_{i-1} \rangle \cap \langle F_i \rangle$ が pure[19]

(3) 任意の $2 \leq i \leq m$ に対して, $\dim \langle F_1, F_2, \ldots, F_{i-1} \rangle \cap \langle F_i \rangle = \dim F_i - 1$

を満たす $F_1, F_2, \ldots, F_m \in \mathcal{F}(\Delta)$ が存在することである。このような $F_1, F_2, \ldots, F_m \in \mathcal{F}(\Delta)$ を shelling order と呼ぶ。

単体的複体 Δ が shellable ならば, shelling order $F_1, F_2, \ldots, F_m \in \mathcal{F}(\Delta)$ を $\dim F_1 \geq \dim F_2 \geq \cdots \geq \dim F_m$ を満たすように選ぶことができる。仮定より, $\Delta \neq \{\emptyset\}$ であるので, 任意の $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} R$ に対して, $\mathfrak{p} \not\supseteq I_1$ が成り立つ。加えて, Δ が shellable ならば, R は系列的 Cohen-Macaulay 環なので, 次を得る。

命題 5.19 ([94, Proposition 5.1]). 単体的複体 Δ が shellable ならば, $\mathcal{R}'(\mathfrak{m})$ は系列的 Cohen-Macaulay 環である。

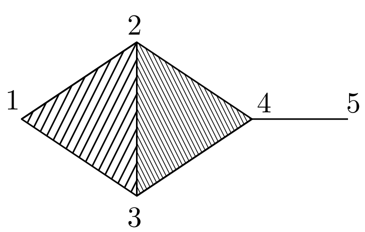
定理 5.20 ([94, Theorem 5.2]). Δ は shellable であり, shelling order $F_1, F_2, \ldots, F_m \in \mathcal{F}(\Delta)$ は $\dim F_1 \geq \cdots \geq \dim F_m$ を満たすと仮定する。次の 2 条件は同値である。

(1) $\mathcal{R}(\mathfrak{m})$ は系列的 Cohen-Macaulay 環である。

(2) $m = 1$ または, $m \geq 2$ であって, 任意の $2 \leq i \leq m$ に対して, $\dim F_i + 1 > \#\mathcal{F}(\Delta_1 \cap \Delta_2)$ が成り立つ。但し, $\Delta_1 = \langle F_1, F_2, \ldots, F_{i-1} \rangle$, $\Delta_2 = \langle F_i \rangle$ とする。

系 5.21 ([94, Corollary 5.4]). 定理 5.20 の設定の下, $m \geq 2$ であり, $\dim F_m \geq 1$ と仮定する。任意の $2 \leq i \leq m$ に対して, $\langle F_1, F_2, \ldots, F_{i-1} \rangle \cap \langle F_i \rangle$ が単体ならば, $\mathcal{R}(\mathfrak{m})$ は系列的 Cohen-Macaulay 環である。

例 5.22. $\Delta = \langle F_1, F_2, F_3 \rangle$ を $F_1 = \{1, 2, 3\}$, $F_2 = \{2, 3, 4\}$, $F_3 = \{4, 5\}$ により定めると, Δ は shellable であって, $\langle F_1 \rangle \cap \langle F_2 \rangle$ と $\langle F_1, F_2 \rangle \cap \langle F_3 \rangle$ は単体である。従って, $\mathcal{R}(\mathfrak{m})$ は系列的 Cohen-Macaulay 環である。

$\Delta =$ 

[18] shellable とは, 単体的複体 Δ の facet を貝殻を 1 枚ずつ重ねるように順番に並べられることを意味する。

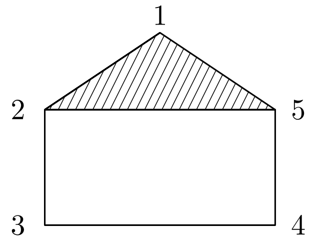
[19] 単体的複体 Δ が pure であるとは, 任意の $F_1, F_2 \in \mathcal{F}(\Delta)$ に対し, $\dim F_1 = \dim F_2$ が成り立つことである。

例 5.23. $\Delta = \langle F_1, F_2, F_3, F_4 \rangle$ を $F_1 = \{1, 2, 5\}$, $F_2 = \{2, 3\}$, $F_3 = \{3, 4\}$, $F_4 = \{4, 5\}$ により定めると, Δ は shellable である。$\Delta_1 = \langle F_1, F_2, F_3 \rangle$, $\Delta_2 = \langle F_4 \rangle$ を考えると

$$\#\mathcal{F}(\Delta_1 \cap \Delta_2) = 2 = \dim F_4 + 1$$

であるので, $\mathcal{R}(\mathfrak{m})$ は系列的 Cohen-Macaulay 環ではない。

$\Delta =$



6 Blow-up 代数の Buchsbaum 性

Buchsbaum 環は, 1973 年に W. Vogel が D. A. Buchsbaum の問題に対して否定的な結論を得た事実を契機として, J. Stückrad-Vogel によって導入された Cohen-Macaulay 環の拡張概念である[20]。まず, Buchsbaum の問いを振り返りたい。

問題 6.1 ([8, page 228], [33, page 42])**.** $(A, \mathfrak{m})$ は Noether 局所環とする。環 A の任意の巴系イデアル Q に対して, 差 $\ell_A(A/Q) - \mathrm{e}_Q^0(A)$ は $\dim A - \operatorname{depth} A$, 或いは他の不変量によって決定されるだろうか。

ここで, $\ell_A(X)$ により A-加群 X の長さを表し, 有限生成 A-加群 M とその巴系イデアル $\mathfrak{q}$ に対して, $\mathrm{e}_{\mathfrak{q}}^0(M)$ は $\mathfrak{q}$ に関する M の重複度とする。

現代的な観点から見れば, 上記の問いが正しくはないことは容易に判別されるが, その反例が Vogel によって初めて提示されたのは 1973 年のことである ([102, Satz])。その後, 上記の差 $\ell_A(A/Q) - \mathrm{e}_Q^0(A)$ が一定値となる局所環の構造が解析される過程で, Buchsbaum 環の概念が, 同年 Stückrad-Vogel によって定義された。もっとも 1973 年の段階では, Buchsbaum 環は I-環 (I-Ring) と呼ばれており ([88, Definition 2]), その翌年の 1974 年に, Buchbaum 環という名称が初めて登場した ([89, Section 3, Definitionen, page 439])。

以下, $(A, \mathfrak{m})$ は Noether 局所環とし, M は有限生成 A-加群, $s = \dim_A M$ とする。

定義 6.2 ([88, Definition 2], [89, Section 3, Definitionen, page 439])**.** A-加群 M が Buchsbaum 環 A-加群であるとは, 差 $\mathrm{I}(M) = \ell_A(M/\mathfrak{q}M) - \mathrm{e}_{\mathfrak{q}}^0(M)$ が, M の巴系イデアル $\mathfrak{q}$ の選び方に依らず, 一定値[21]を取ることをいう。また, $s \geq 1$ の場合, この条件は, M の任意の巴系 $a_1, a_2, \ldots, a_s$ が M-弱列 (weak M-sequence) を成すこと, 即ち, 任意の整数 $0 \leq i \leq s-1$ に対して, 等式

$$(a_1, \ldots, a_i)M :_M a_{i+1} = (a_1, \ldots, a_i)M :_M \mathfrak{m}$$

が成り立つことと同値[22]である ([90, Theorem 1.12], [108, 定理 9.14])。なお, M が Buchsbaum A-加群であることは, M の任意の巴系 $a_1, a_2, \ldots, a_s$ が d-列[23]を成す, 即ち, 任意の整数 $1 \leq i \leq j \leq s$ に対して, 等式

$$(a_1, \ldots, a_{i-1})M :_M a_i a_j = (a_1, \ldots, a_{i-1})M :_M a_j$$

[20]系列的 Cohen-Macaulay 性とは別方向への拡張である。後藤四郎先生のお言葉であるが, Cohen-Macaulay 環との比較において, Buchsbaum 環とは双子であり, Buchsbaum 環の更なる一般化である FLC 環 (finitely generated local cohomology modules を持つ環) とは従兄弟, 系列的 Cohen-Macaulay 環とは友達である。

[21]一般に, $\ell_A(M/\mathfrak{q}M) \geq \mathrm{e}_{\mathfrak{q}}^0(M)$ が成り立つ ([108, 命題 8.21]) ので, 一定値は非負整数値を取る。

[22]但し, $i = 0$ のとき, $(a_1, \ldots, a_i) = (0)$ と定める。

[23]d-列の概念は, C. Huneke ([63, Definition 1.1]) により導入された。基本的性質に関しては, [108, 付録 D] も併せて参照されたい。

が成り立つこととも同値である ([63, Remarks (1), page 252], [108, 命題 9.12])。環 A が Buchsbaum 環であるとは, A 自身が Buchsbaum A-加群であることをいう。

M が Buchsbaum A-加群であるとき, M の巴系イデアル $\mathfrak{q}$ の取り方に依らず定まる一定値

$$\mathrm{I}(M) = \ell_A(M/\mathfrak{q}M) - \mathrm{e}^0_{\mathfrak{q}}(M)$$

を M の Buchsbaum 不変量[24]という。次元正の Buchsbaum A-加群 M は, M-弱列により特徴付けられるため, $\mathfrak{m}\,\mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(M) = (0)$ $(\forall\, i \neq s)$ であって, 局所コホモロジー加群 $\mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(M)$ $(\forall\, i \neq s)$ は剰余体 $A/\mathfrak{m}$ 上の有限次元ベクトル空間となり, 等式

$$\mathrm{I}(M) = \sum_{i=0}^{s-1} \binom{s-1}{i} \ell_A(\mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(M))$$

が成り立つ ([90, Proposition 2.6])。Buchsbaum A-加群 M において, 任意の $\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}_A M \setminus \{\mathfrak{m}\}$ に対して, 局所化 $M_{\mathfrak{p}}$ は Cohen-Macaulay $A_{\mathfrak{p}}$-加群であって, 等式 $\dim_{A_{\mathfrak{p}}} M_{\mathfrak{p}} = \dim_A M - \dim A/\mathfrak{p}$ が成り立つ ([108, 定理 9.6])。

有限生成 A-加群 $M \neq (0)$ に対し, $s = \dim_A M$ とおくと, $\mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(M) = \varinjlim_n \mathrm{Ext}^i_A(A/\mathfrak{m}^n, M)$ であるので, 自然な射

$$\mathrm{Ext}^i_A(A/\mathfrak{m}^n, M) \to \mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(M)$$

が得られる。次の定理が, 所謂, Buchsbaum 性に関する surjectivity criterion である。

定理 6.3 ([90, Theorem 2.10], [108, 定理 9.19])**.** 任意の $i \neq s$ に対して, 上記の自然な射が全射であれば, M は Buchsbaum A-加群である。A が正則局所環であれば, 逆も正しい。

定理 6.3 の帰結として, 次を得る。

系 6.4 ([90, Theorem 2.10], [108, 系 9.20])**.** $t = \mathrm{depth}_A M < s$ かつ $\mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(M) = (0)$ $(i \neq t, s)$ と仮定する。このとき, M が Buchsbaum A-加群であるための必要十分条件は, $\mathfrak{m}\,\mathrm{H}^t_{\mathfrak{m}}(M) = (0)$ が成り立つことである。

例 6.5 ([108, 例 9.16])**.** k は体とし, $S = k[[X, Y, Z, W]]$ は k 上の形式的冪級数環とする。このとき, $A = S/(X, Y) \cap (Z, W)$ は 2 次元 Buchsbaum 局所環, $\mathrm{depth}\, A = 1$ である。

以下, 与えられた blow-up 代数が如何なる条件下で Buchsbaum 環になり得るかという問いを考察する。

定理 6.6 ([35, Theorem 1.1 (3)])**.** $(A, \mathfrak{m})$ は Buchsbaum 局所環, $d = \dim A \geq 1$ とする。A の任意の巴系イデアル Q に対して, $G(Q)$ は Buchsbaum 環である。

定理 6.7 ([87, Theorem 13])**.** $(A, \mathfrak{m})$ は Buchsbaum 局所環, $d = \dim A \geq 1$ とする。A の任意の巴系イデアル Q に対して, $\mathcal{R}(Q)$ は Buchsbaum 環である。

定理 6.6, 定理 6.7 は, 後藤-下田の定理の Buchsbaum 性への拡張可能性を示唆する。この方面においては, 次の結果が知られている。

定理 6.8 ([37, Theorem (1.2)])**.** $(A, \mathfrak{m})$ は Cohen-Macaulay 局所環, $d = \dim A \geq 2$ とし, 剰余体 $A/\mathfrak{m}$ は無限とする。A の $\mathfrak{m}$-準素イデアル I は極小重複度[25]を持つと仮定する。次の 2 条件は同値である。

(1) $\mathcal{R}(I)$ は Buchsbaum 環である。

[24]或いは, I-不変量とも呼ばれる。
[25]等式 $\mu_A(I) = \mathrm{e}^0_I(A) + d - \ell_A(A/I)$ が成り立つことである。

(2) $G(I)$ は Buchsbaum 環である。

その後, 礎石イデアル $I = Q :_A \mathfrak{m}$ に付随する blow-up 代数の Buchsbaum 性を巡る諸問題も提起され, 後藤, 西田に加え, 山岸規久道や櫻井秀人により精力的に解析されている。本節においては, より多くの Buchsbaum となる Rees 代数の例を提供するという観点から, Ratliff-Rush 閉包に着目したい。ここで, 加群に対する Rees 代数を考察する。

Rees 代数は通常イデアルに基づき定義されるが, 自由加群の対称代数が多項式環に同型である事実を用いて, 自然に加群へと拡張され, 特異点論への応用を中核に加群に固有の理論が展開されている ([25, 26, 27, 28, 29, 84, 85])。

定義 6.9 (加群の Rees 代数)**.** A は Noether 環とする。有限生成自由 A-加群 $F = A^{\oplus r}$ $(r > 0)$ の A-部分加群 M に対して, 包含写像から誘導される対称代数 $\mathrm{Sym}_A(-)$ の間の射

$$\mathrm{Sym}(i) : \mathrm{Sym}_A(M) \to \mathrm{Sym}_A(F) = A[t_1, t_2, \ldots, t_r] = S$$

を考える。このとき, $\mathcal{R}(M) = \mathrm{Im}\,\mathrm{Sym}(i)$ と定め, A-加群 M の Rees 代数と呼ぶ。多項式環 S を自然に $\mathbb{Z}$-次数環と考え, この次数付けを用いて $\mathcal{R}(M)$ も $\mathbb{Z}$-次数環の構造を持つ。従って

$$\mathcal{R}(M) = \bigoplus_{n \geq 0} M^n$$

と表せる。但し, M^n は $\mathcal{R}(M)$ の n 次斉次成分である。

A-加群 M は, $\mathcal{R}(M)$ の 1 次斉次成分 $[\mathcal{R}(M)]_1$ に一致し, 対称代数は次数 1 の斉次成分で生成されるので, Rees 代数 $\mathcal{R}(M)$ は A 上 M により生成される標準的次数付き A-代数である。また, $r = 1$ の場合, A-加群 M として A 内のイデアル I を選ぶと, 加群 M の Rees 代数はイデアル I の Rees 代数に一致する。即ち, $\mathcal{R}(M) = \mathcal{R}(I) = A[It]$ が成り立つ。環 A 内のイデアル $I_1, I_2, \ldots, I_r$ に対して, A-加群 $M = I_1 \oplus I_2 \oplus \cdots \oplus I_r$ を $F = A^{\oplus r}$ の A-部分加群と考えると, M の Rees 代数は多重 Rees 代数 $\mathcal{R}(I_1, I_2, \ldots, I_r) = A[I_1t_1, I_2t_2, \ldots, I_rt_r]$ となる。

注意 6.10. M が A-加群として階数 $e > 0$ を持つ[26]とすると, $\mathrm{Ker}\,\mathrm{Sym}(i) = t(\mathrm{Sym}_A(M))$ が成り立つ。ここで, $t(\mathrm{Sym}_A(M))$ は $\mathrm{Sym}_A(M)$ の A-加群としての捩れ部分を表す。従って

$$\mathcal{R}(M) \cong \mathrm{Sym}_A(M)/t(\mathrm{Sym}_A(M))$$

となり, Rees 代数 $\mathcal{R}(M)$ は M の自由加群への埋め込みの取り方に依存しない。

定理 6.11 ([85, proposition 2.2])**.** $(A, \mathfrak{m})$ は Noether 局所環, $d = \dim A$ とし, M は有限生成自由 A-加群 $F = A^{\oplus r}$ $(r > 0)$ の A-部分加群であって, 階数 r を持つとする。等式

$$\dim \mathcal{R}(M) = d + r = d + \mathrm{ht}_{\mathcal{R}(M)}\, \mathcal{R}(M)_+$$

が成り立つ。

加群の Rees 代数は, イデアルの Rees 代数の場合と異なり, 随伴次数環が存在しないという顕著な事実により, その構造はイデアルの場合に比べ遥かに複雑となる。この事実を鑑み, 随伴次数環の非存在性を補うべく, 導入された概念が generic Bourbaki ideals である。

定義-定理 6.12 ([85, Definition 3.3, Theorem 3.5])**.** $(A, \mathfrak{m})$ は Noether 局所環, $d = \dim A$ とし, M は有限生成自由 A-加群 $F = A^{\oplus r}$ $(r > 0)$ の A-部分加群であって, 階数 r を持つとする。$\mathrm{depth}\, A_\mathfrak{p} \leq 1$ を満たす任意の $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, A$ に対して, $M_\mathfrak{p}$ は自由 $A_\mathfrak{p}$-加群であると仮定する。A-加群 M の生成元を $a_1, a_2, \ldots, a_n$ とし, A 上の多項式環

$$A' = A[Z] = A[Z_{ij} \mid 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq r - 1]$$

[26]即ち, $\mathrm{Q}(A)$ により A の全商環を表すとき, $\mathrm{Q}(A) \otimes_A M \cong \mathrm{Q}(A)^{\oplus e}$ が成り立つことである。

を考える。但し, $Z = \{Z_{ij} \mid 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq r-1\}$ は A 上の不定元の成す集合を表す。また, $M' = M \otimes_A A'$ 内において, $x_j = \sum_{i=1}^{n} Z_{ij} a_i$ $(1 \leq j \leq r-1)$ とおき, $G' = \sum_{j=1}^{r-1} A' x_j$ とする。さらに

$$A'' = A[Z]_{\mathfrak{m}A[Z]}, \quad M'' = M \otimes_A A'', \quad G'' = G' \otimes_{A'} A''$$

とおく。このとき, $G'' \cong (A'')^{\oplus(r-1)}$ であって, $\operatorname{grade}_{A''} I > 0$ かつ $E''/G'' \cong I$ を満たす A'' のイデアル I が存在する ([85, Proposition 3.2])。イデアル I を E の generic Bourbaki ideal という ([85, Definition 3.3])。上記の設定の下, 次の主張が成り立つ ([85, Theorem 3.5])。

(1) $\mathcal{R}(M)$ が Cohen-Macaulay 環であるための必要十分条件は, $\mathcal{R}(I)$ が Cohen-Macaulay 環である。

(2) $\mathcal{R}(I)$ が正規ならば, $\mathcal{R}(M)$ は正規である。逆は, (0) でない任意の $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ に対し, $\operatorname{depth} A_{\mathfrak{p}} \otimes_A \mathcal{R}(M) \geq r+1$ ならば, 正しい。

従って, 加群の Rees 代数の議論がイデアルの場合に帰着されるのである。次に, 加群に対する整閉包の概念を紹介する。

定義 6.13. A は Noether 環とし, M は有限生成自由 A-加群 $F = A^{\oplus r}$ $(r > 0)$ の A-部分加群とする。整数 $n \geq 0$ に対して, M^n の整閉包を

$$\overline{M^n} = \left(\overline{\mathcal{R}(M)}^S\right)_n \subseteq S_n = F^n$$

により定める。但し, $\overline{\mathcal{R}(M)}^S$ は $\mathcal{R}(M)$ の S 内における整閉包を表す。言い換えるなら, $\overline{M^n}$ は S のイデアル $(MS)^n$ に対する整閉包の n 次斉次成分にも一致する。即ち

$$\overline{M^n} = \left(\overline{(MS)^n}\right)_n$$

が成り立つ。特に, $\overline{M} = \left(\overline{MS}\right)_1 \subseteq F$ であって, 元 $x \in \overline{M}$ は, 環 S 内における等式

$$x^n + c_1 x^{n-1} + \cdots + c_n = 0 \quad (\exists\, n > 0,\ \exists\, c_i \in M^i)$$

を満たす。

注意 6.14 ([23, Lemma 2.2]). M が階数 r を持つならば, $\mathrm{Q}(\mathcal{R}(M)) = \mathrm{Q}(S)$ である。特に, A が正規整域ならば, $\overline{\mathcal{R}(M)}^{\mathrm{Q}(\mathcal{R}(M))} = \overline{\mathcal{R}(M)}^S$ が成り立つ。但し, $\mathrm{Q}(-)$ により全商環を表す。

以上を踏まえて, 加群に対する Ratliff-Rush 閉包を導入する。

定義 6.15 ([23, Definition 3.1])**.** A は Noether 環, M は有限生成自由 A-加群 $F = A^{\oplus r}$ $(r > 0)$ の A-部分加群とする。自然な全射 $\varepsilon : S \to S/\mathcal{R}(M)$ について, 環 S の次数付き部分環

$$\widetilde{\mathcal{R}(M)}^S = \varepsilon^{-1}\left(\mathrm{H}^0_{\mathfrak{a}}(S/\mathcal{R}(M))\right) \subseteq S$$

を考える。但し, $\mathfrak{a} = \mathcal{R}(M)_+$ とする。整数 $n \geq 0$ に対して, M^n の Ratliff-Rush 閉包を

$$\widetilde{M^n} = \left(\widetilde{\mathcal{R}(M)}^S\right)_n \subseteq S_n = F^n$$

により定める。即ち

$$\widetilde{M^n} = \bigcup_{\ell > 0} \left[(M^n)^{\ell+1} :_{F^n} (M^n)^{\ell}\right]$$

が成り立つ。特に, $\widetilde{M} = \bigcup_{\ell > 0} \left[M^{\ell+1} :_F M^{\ell}\right]$ である。

定義 6.15 はイデアルの Ratliff-Rush 閉包の自然な拡張である。基本的性質等の詳細は, [23, Section 3] を参照されたい。

定理 6.16 ([23, Theorem 1.2], [111, 定理 3.6])**.** $(A, \mathfrak{m})$ は 2 次元正則局所環とし, 剰余体 $A/\mathfrak{m}$ は無限とする。$M \neq (0)$ は有限生成 torsion-free A-加群とする。次の 2 条件は同値である。

(1) $\widetilde{M} = \overline{M}$

(2) $\operatorname{Proj} \mathcal{R}(M)$ は正規スキーム

上記の同値条件が成り立つとき, $\mathcal{R}(M)$ が Cohen-Macaulay 環であるための必要十分条件は, A-加群 M が整閉である。

系 6.17 ([23, Theorem 5.1], [111, 系 3.7])**.** 定理 6.16 の設定の下, 次の 3 条件は同値である。

(1) $\mathcal{R}(M)$ は Buchsbaum 環であり, かつ $\widetilde{M} = \overline{M}$ である。

(2) $\mathcal{R}(M)$ は Buchsbaum 環であり, かつ $\operatorname{Proj} \mathcal{R}(M)$ は正規である。

(3) $\mathfrak{m}\overline{M} \subseteq M$ であり, かつ $M \cdot \overline{M} = M^2$ である。

例 6.18. $A = k[[X, Y]]$ は無限体 k 上の形式的冪級数環とする。次の主張が成り立つ。

(1) $I = (X^4, X^3Y^2, XY^6, Y^8)$, $M = I \oplus I \subseteq F = A \oplus A$ とおくと, $\mathcal{R}(M)$ は Buchsbaum 環ではない。

(2) $I_1 = (X^6, X^5Y^2, X^4Y^3, X^3Y^4, XY^7, Y^8)$, $I_2 = (X^5, X^4Y^2, X^3Y^3, XY^6, Y^7)$ とし, $M = I_1 \oplus I_2 \subseteq F = A \oplus A$ とおくと, $\mathcal{R}(M)$ は Buchsbaum 環である。

(3) $M = \left\langle \begin{pmatrix} X^3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X^2Y^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} XY^3 \\ X^3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Y^5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ X^2Y^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ XY^4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ Y^5 \end{pmatrix} \right\rangle$ とおくと, A-加群 M は直既約であり, $\mathcal{R}(M)$ は Buchsbaum 環である。

7 Blow-up 代数の Cohen-Macaulay 正規性

本小稿の掉尾を飾るべく, 本節では blow-up 代数, 特に Rees 代数の Cohen-Macaulay 正規性について論じる。第 6 節において, 加群に対する整閉包を紹介したが, ここではイデアルの場合の定義を改めて振り返りたい。

以下, A は Noether 環, I は A のイデアルとする。元 $x \in A$ が I 上で整 (integral over I) であるとは, 等式

$$x^n + c_1x^{n-1} + \cdots + c_n = 0, \quad \exists\, n > 0, \exists\, c_i \in I^i \ (1 \leq i \leq n)$$

を満たすことである。イデアル I 上で整であるような環 A の元全体の集合

$$\overline{I} = \{x \in A \mid x \text{ は } I \text{ 上で整である }\}$$

は A のイデアルであって, I の整閉包 (integral closure) と呼ばれる。等式 $I = \overline{I}$ が成り立つとき, イデアル I は整閉といい, I の任意の冪が整閉であるとき, 即ち, $I^n = \overline{I^n}$ が任意の整数 $n \geq 1$ に対して成立するとき, I は正規であるという。なお, A が正規整域の場合, Rees 代数の正規性はイデアルの正規性と同値である。本節で考察する問題は下記の通りである。

問題 7.1. $(A, \mathfrak{m})$ は正則局所環, $d = \dim A$ とし, I は整閉な $\mathfrak{m}$-準素イデアルとする。このとき, いつ Rees 代数 $\mathcal{R}(I)$ は Cohen-Macaulay 正規整域となるか。

問題 7.1 に対して, $d \le 1$ の場合は, 定義により, $\mathcal{R}(I)$ は常に Cohen-Macaulay 正規整域である。$d = 2$ の場合は, Zariski の定理 ([104, Part II, Section 12], [105, Appendix 5, Theorem 2'], [64, Theorem 3.7]) により, $\mathcal{R}(I)$ は正規であって, Lipman-Tessier の定理 ([70, Proposition 5.5], [64, Theorem 5.1], [66, Theorem 3.1]) と後藤-下田の定理 (定理 2.4) により, $\mathcal{R}(I)$ は Cohen-Macaulay 環である。なお, 2 次元の場合には, 環 A の正則性を緩和して, $(A, \mathfrak{m})$ が 2 次元有理特異点[27]の場合にも, 剰余体が無限ならば, Rees 代数 $\mathcal{R}(I)$ は Cohen-Macaulay 正規整域である ([69, Theorem (7.1)], [112, 5.45 定理])。有理特異点とイデアルの整閉性に関しては次の定理がある。

定理 7.2 ([19, Theorem 1])**.** $(A, \mathfrak{m})$ は 2 次元優秀正規局所整域とし, 剰余体 $A/\mathfrak{m}$ は代数閉体であると仮定する。次の 3 条件は同値である。

(1) A は有理特異点である。

(2) I, J が整閉な $\mathfrak{m}$-準素イデアルならば, IJ は整閉である。

(3) I が A の整閉な $\mathfrak{m}$-準素イデアルならば, I^2 は整閉である。

同論文 ([19]) において, 環 $A = \mathbb{Q}[[X, Y, Z]]/(X^3 + 3Y^3 + 9Z^3)$ は有理特異点ではない 2 次元正規局所整域であって, 任意の整閉な $\mathfrak{m}$-準素イデアル I, J に対して, IJ が整閉であることも示されている。即ち, 定理 7.2 では, 剰余体 $A/\mathfrak{m}$ が代数閉体という仮定は不可欠である。

議論を正則局所環に戻して, $d \ge 3$ の場合を考察すると, 実は次の例が存在する。

例 7.3 ([92, Exercise 1.14])**.** $A = k[[X, Y, Z]]$ は体 k 上の形式的冪級数環とする。このとき

$$Q = (X^7, Y^3, Z^2), \quad I = \overline{Q} = (X^7, Y^3, Z^2, X^5Y, X^4Z, X^3Y^2, X^2YZ, Y^2Z)$$

とおくと, $\overline{I} = I$, $\overline{I^2} \neq I^2$, $I^2 = QI$ である。故に, $\mathcal{R}(I)$ は Cohen-Macaulay 環であるが, 正規ではない。

例 7.4 ([62, Theorem 3.11])**.** $A = k[[X, Y, Z]]$ は体 k 上の形式的冪級数環とする。$\mathrm{ch}\, k \neq 3$ と仮定し, $I = (X^4, X(Y^3 + Z^3), Y(Y^3 + Z^3), Z(Y^3 + Z^3)) + \mathfrak{m}^5$ とおくと, I は正規であるが, $G(I)$ は Cohen-Macaulay 環ではない。故に, $\mathcal{R}(I)$ は正規であるが, Cohen-Macaulay 環ではない。但し, $\mathfrak{m} = (X, Y, Z)$ とする。

つまり, $d \ge 3$ の場合, 例 7.4 が示すように, 正規性は Cohen-Macaulay 性を導かない。同様に, 例 7.3 より, Cohen-Macaulay 環であるが, 正規でない Rees 代数も存在する。従って, Rees 代数の Cohen-Macaulay 性と正規性は独立の概念であり, Rees 代数が Cohen-Macaulay かつ正規整域になるためには, 基礎環, 或いはイデアルに対する制約条件が必要となる。本節では基礎環を正則と仮定しているので, イデアルに対する条件に焦点を当て議論を進める。とりわけ, その条件として生成元の個数に注目して考察する。ここで, $v(-)$ により環の埋め込み次元を表し, $\mu_A(-)$ は極小生成系の個数である。この方面においては, 次の結果がある。

定理 7.5 ([36, Corollary (1.3)])**.** $(A, \mathfrak{m})$ は正則局所環, $d = \dim A$ とし, I は整閉な $\mathfrak{m}$-準素イデアルとする。次の主張が成り立つ。

(1) $\mu_A(I) = d$ ならば, $\mathcal{R}(I)$ は Cohen-Macaulay 正規整域である。

(2) $\mu_A(I) = d$ であることの必要十分条件は, $v(A/I) \le 1$ である。

定理 7.6 ([12, Theorem 1.1, Corollary 3.3], [13, Section 4])**.** $(A, \mathfrak{m})$ は正則局所環, $d = \dim A$ とし, I は整閉な $\mathfrak{m}$-準素イデアルとする。次の主張が成り立つ。

[27] 正規局所環 A が有理特異点であるとは, 特異点解消 $f : X \to \operatorname{Spec} A$ であって, $\mathrm{H}^i(X, \mathcal{O}_X) = (0)$ $(\forall\, i > 0)$ を満たすものが存在することをいう。

(1) $\mu_A(I) = d+1$ ならば, $\mathcal{R}(I)$ は Cohen-Macaulay 正規整域である。

(2) $\mu_A(I) = d+1$ ならば, $v(A/I) \le 2$ である。

以上の先行研究を踏まえて, 本報告書の最後に最近の結果を紹介したい。

定理 7.7 ([25]). $(A, \mathfrak{m})$ は正則局所環, $d = \dim A$ とし, I は整閉な $\mathfrak{m}$-準素イデアルとする。次の主張が成り立つ。

(1) $v(A/I) \le 2$ ならば, $\mathcal{R}(I)$ は Cohen-Macaulay 正規整域である。

(2) $\mu_A(I) \le d+2$ ならば, $v(A/I) \le 2$ である。

特に, $\mu_A(I) \le d+2$ ならば, $\mathcal{R}(I)$ は Cohen-Macaulay 正規整域である。

例 7.8. $A = k[[X, Y, Z]]$ は体 k 上の形式的冪級数環とする。次の主張が成り立つ。

(1) $I = \overline{(X^3, Y^3, Z)} = (X^3, X^2Y, XY^2, Y^3, Z)$ とおくと, I は整閉な $\mathfrak{m}$-準素イデアルであって, $\mu_A(I) = 5 = d+2$ である。故に, $\mathcal{R}(I)$ は Cohen-Macaulay 正規整域である。

(2) $I = \overline{(X^4, Y^4, Z)} = (X^4, X^3Y, X^2Y^2, XY^3, Y^4, Z)$ とおくと, I は整閉な $\mathfrak{m}$-準素イデアルであって, $\mu_A(I) = 6 > d+2$ であるが, $v(A/I) = 2$ である。従って, $\mathcal{R}(I)$ は Cohen-Macaulay 正規整域である。

(3) 任意の $f \in \mathfrak{m} \setminus \mathfrak{m}^2$ と整数 $n \ge 1$ に対し, $I = (f) + \mathfrak{m}^n$ とおくと, I は整閉な $\mathfrak{m}$-準素イデアルであって, $v(A/I) \le 2$ である。故に, $\mathcal{R}(I)$ は Cohen-Macaulay 正規整域である。

定理 7.9 ([25]). 標数 0 の体 k 上の多項式環 $A = k[X_1, X_2, \ldots, X_d]$ における整閉な $\mathfrak{m}$-準素イデアル I に対して, $\mu_A(I) \le d+3$ かつ I が単項式イデアルならば, $\mathcal{R}(I)$ は Cohen-Macaulay 正規整域である。

謝辞. 第 70 回代数学シンポジウムの関係者の皆様に深く感謝申し上げます。とりわけ貴重な講演の機会を賜りましたプログラム責任者の村井聡先生, 山浦浩太先生, 並びにシンポジウム責任者の平野幹先生, 会場責任者の小林真一先生に心より御礼申し上げます。

参考文献

[1] J. Barshay, Graded algebras of powers of ideals generated by A-sequences, *J. Algebra*, **25** (1973), 90–99.

[2] V. Barucci and R. Fröberg, One-dimensional almost Gorenstein rings, *J. Algebra*, **188** (1997), no. 2, 418–442.

[3] H. Bass, On the ubiquity of Gorenstein rings, *Math. Z.*, **82** (1963), 8–28.

[4] A. Björner and M. L. Wachs, Shellable nonpure complexes and posets. I, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **348** (1996), no.4, 1299–1327.

[5] W. Bruns and A. Conca, F-rationality of determinantal rings and their Rees rings, *Michigan Math. J.*, **45** (1998), no.2, 291–299.

[6] W. Bruns and J. Herzog, Cohen-Macaulay Rings, *Cambridge University Press*, Cambridge, 1993.

[7] W. Bruns and U. Vetter, Determinantal rings, Lecture Notes in Mathematics, 1327, *Springer-Verlag*, Berlin, 1988.

[8] D. A. Buchsbaum, Complexes in local ring theory, Some Aspects of Ring Theory, C.I.M.E., Rome, 1965.

[9] E. Celikbas, O. Celikbas, S. Goto, and N. Taniguchi, Generalized Gorenstein Arf rings, *Ark. Mat.*, **57** (2019), no.1, 35–53.

[10] E. Celikbas, N. Endo, J. Laxmi, and J. Weyman, Almost Gorenstein determinantal rings of symmetric matrices, *Comm. Algebra*, **50** (2022), no.12, 5449–5458.

[11] T. D. M. Chau, S. Goto, S. Kumashiro, and N. Matsuoka, Sally modules of canonical ideals in dimension one and 2-AGL rings, *J. Algebra*, **521** (2019), 299–330.

[12] C. Ciupercă, Integrally closed almost complete intersection ideals, *Journal of Algebra*, **302** (2006), 720–728.

[13] C. Ciupercă, Integral closure and generic elements, *Journal of Algebra*, **328** (2011), 122–131.

[14] I. S. Cohen, On the structure and ideal theory of complete local rings, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **59** (1946), 54–106.

[15] C. D. Consini and C. Procesi, A characteristic free approach to invariant theory, *Adv. Math.*, **21** (1976), 330–354.

[16] N. T. Cuong and D. T. Cuong, On sequentially Cohen-Macaulay modules, *Kodai Math. J.*, **30** (2007), 409–428.

[17] N. T. Cuong, S. Goto, and H. L. Truong, The equality $I^2 = \mathfrak{q}I$ in sequentially Cohen-Macaulay rings, *J. Algebra*, **379** (2013), 50–79.

[18] N. T. Cuong and L. T. Nhan, Pseudo Cohen-Macaulay and pseudo generalized Cohen-Macaulay modules, *J. Algebra*, **267** (2003), no.1, 156–177.

[19] S. D. Cutkosky, A new characterization of rational surface singularities, *Invent. Math.*, **102** (1990), 157–177.

[20] H. Dao, T. Kobayashi, and R. Takahashi, Trace ideals of canonical modules, annihilators of Ext modules, and classes of rings close to being Gorenstein, *J. Pure Appl. Algebra*, **225** (2021), no. 9, Paper No.106655.

[21] D. Eisenbud and J. Harris, The geometry of schemes, *Springer-Verlag*, New York, 2000.

[22] D. Eisenbud, C. Huneke, and B. Ulrich, What is the Rees algebra of a module?, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **131** (2003), 701–708.

[23] N. Endo, On Ratliff-Rush closure of modules, *Math. Scand.*, **126** (2020), no.2, 170–188.

[24] N. Endo, Goto rings, arXiv:2312.14379.

[25] N. Endo, J. Hong, and B. Ulrich, Normality of ideals and modules, preprint 2025.

[26] T. Gaffney, Integral closure of modules and Whitney equisingularity, *Invent. Math.*, **107** (1992), 301–322.

[27] T. Gaffney, Multiplicities and equsingularity of ICIS germs, *Invent. Math.*, **123** (1996), 209–220.

[28] T. Gaffney, The theory of integral closure of ideals and modules: applications and new developments, With an appendix by Steven Kleiman and Anders Thorup, NATO Sci. Ser. II Math. Phys. Chem., 21, New developments in singularity theory (Cambridge, 2000), 379–404, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2001.

[29] T. Gaffney and S. L. Kleiman, Specialization of integral dependence for modules, *Invent. Math.*, **137** (1999), 541–574.

[30] L. Ghezzi, S. Goto, J. Hong, and W. V. Vasconcelos, Invariants of Cohen-Macaulay rings associated to their canonical ideals, *J. Algebra*, **489** (2017), 506–528.

[31] D. Gorenstein, An arithmetic theory of adjoint plane curves, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **72** (1952), 414–436.

[32] S. Goto, The Veronesean subrings of Gorenstein rings, *J. Math. Kyoto Univ.*, **16** (1976), no.1, 51–55.

[33] S. Goto, Blowing-up characterization for local rings, RIMS Kôkyûroku, **400** (1980), 42–50.

[34] S. Goto, Buchsbaum rings with multiplicity 2, *J. Algebra*, **74** (1982), 494–508.

[35] S. Goto, On the associated graded rings of parameter ideals in Buchsbaum rings, *J. Algebra*, **85** (1983), 490–534.

[36] S. Goto, Integral closedness of complete intersection ideals, *J. Algebra*, **108** (1987), 151–160.

[37] S. Goto, Buchsbaumness in Rees algebras associated to ideals of minimal multiplicity, *J. Algebra*, **213** (1999), 604–661.

[38] S. Goto, Y. Horiuchi, and H. Sakurai, Sequentially Cohen-Macaulayness versus parametric decomposition of powers of parameter ideals, *J. Comm. Algebra*, **2** (2010), 37–54.

[39] S. Goto and S.-i. Iai, Embeddings of certain graded rings into their canonical modules, *J. Algebra*, **228** (2000), no.1, 377–396.

[40] S. Goto and S. Kumashiro, On generalized Gorenstein local rings, arXiv:2212.12762.

[41] S. Goto, D. V. Kien, N. Matsuoka, and H. L. Truong, Pseudo-Frobenius numbers versus defining ideals in numerical semigroup rings, *J. Algebra*, **508** (2018), 1–15.

[42] S. Goto, N. Matsuoka and T. T. Phuong, Almost Gorenstein rings, *J. Algebra*, **379** (2013), 355–381.

[43] S. Goto, N. Matsuoka, N. Taniguchi, and K.-i. Yoshida, The almost Gorenstein Rees algebras of parameters, *J. Algebra*, **452** (2016), 263–278.

[44] S. Goto, N. Matsuoka, N. Taniguchi, and K.-i. Yoshida, The almost Gorenstein Rees algebras over two-dimensional regular local rings, *J. Pure Appl. Algebra*, **220** (2016), 3425–3436.

[45] S. Goto, N. Matsuoka, N. Taniguchi, and K.-i. Yoshida, On the almost Gorenstein property in Rees algebras of contracted ideals, *Kyoto J. Math.*, **59** (2019), no.4, 769–785.

[46] S. Goto, N. Matsuoka, N. Taniguchi, and K.-i. Yoshida, The almost Gorenstein Rees algebras of p_g-ideals, good ideals, and powers of the maximal ideals, *Michigan Math. J.*, **67** (2018), 159–174.

[47] S. Goto and K. Nishida, The Cohen-Macaulay and Gorenstein properties of Rees algebras associated to fltrations, *Mem. Amer. Math. Soc.*, **110**, 1994.

[48] S. Goto, M. Rahimi, N. Taniguchi, and H. L. Truong, When are the Rees algebras of parameter ideals almost Gorenstein graded rings?, *Kyoto J. Math.*, **57** (2017), no.3, 655–666.

[49] S. Goto and Y. Shimoda, On Rees algebras over Buchsbaum rings, *J. Math. Kyoto Univ.*, **20** (1980), 691–708.

[50] S. Goto and Y. Shimoda, On the Rees algebras of Cohen-Macaulay local rings, Commutative algebra (Fairfax, Va., 1979), 201–231, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., **68**, Dekker, New York, 1982.

[51] S. Goto, R. Takahashi and N. Taniguchi, Almost Gorenstein rings -towards a theory of higher dimension, *J. Pure Appl. Algebra*, **219** (2015), 2666–2712.

[52] S. Goto, R. Takahashi, and N. Taniguchi, Ulrich ideals and almost Gorenstein rings, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **144** (2016), 2811–2823.

[53] S. Goto and K.-i. Watanabe, *On graded rings I*, J. Math. Soc. Japan, **30** (1978), no. 2, 179–213.

[54] M. Herrmann, S. Ikeda, and U. Orbanz, Equimultiplicity and blowing up, *Springer-Verlag*, Berlin, 1988. An algebraic study; With an appendix by B. Moonen.

[55] J. Herzog, T. Hibi, and D. I. Stamate, The trace of the canonical module, *Israel J. Math.*, **233** (2019), 133–165.

[56] J. Herzog, S. Kumashiro, and D. I. Stamate, The tiny trace ideals of the canonical modules in Cohen-Macaulay rings of dimension one, *J. Algebra*, **619** (2023), 626–642.

[57] A. Higashitani, Almost Gorenstein homogeneous rings and their h-vectors, *J. Algebra*, **456** (2016), 190–206.

[58] M. Hochster and J. A. Eagon, A class of perfect determinantal ideals, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **77** (1970), 1971–1120.

[59] M. Hochster and C. Huneke, Tight closure of parameter ideals and splitting in module-finite extensions, *J. Algebraic Geom.*, **3** (1994), 599–670.

[60] M. Hochster and L. J. Ratliff, Jr., Five theorems on Macaulay rings, *Pacific J. Math.*, **44** (1973), 147–172.

[61] M. Hochster and J. L. Roberts, Rings of invariants of reductive groups acting on regular rings are Cohen-Macaulay, *Adv. Math.*, **13** (1974), 115–175.

[62] S. Huckaba and C. Huneke, Normal ideals in regular rings, *J. reine angew. Math.*, **510** (1999), 63–82.

[63] C. Huneke, The theory of d-sequences and powers of ideals, *Adv. Math.*, **46** (1982), 249–279.

[64] C. Huneke, Complete ideals in two-dimensional regular local rings, In Commutative Algebra (Berkeley, CA, 1987) Math. Sci. Res. Inst. Publ., **15**, New York, Springer, 1989, pp. 325–338.

[65] C. Huneke, Hyman Bass and ubiquity: Gorenstein rings, Algebra, K-theory, groups, and education (New York, 1997), 55–78. Contemp. Math., **243**, American Mathematical Society, Providence, RI, 1999.

[66] C. Huneke and J. Sally, Birational extensions in dimension two and integrally closed ideals, *J. Algebra*, **115** (1988), 481–500.

[67] S. Ikeda, On the Gorensteinness of Rees algebras over local rings, *Nagoya Math. J.*, **102** (1986), 135–154.

[68] J. Lipman, Rational singularities with applications to algebraic surfaces and unique factorization, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, **36** (1969), 195–279.

[69] J. Lipman, Cohen-Macaulayness in graded algebras, *Math. Res. Lett.*, **1** (1994), 149–157.

[70] J. Lipman and B. Tessier, Pseudo-rational local rings and a theorem of Briançon-Skoda about integral closures of ideals, *Michigan Math. J.*, **28** (1981), 97–116.

[71] F. S. Macaulay, The algebraic theory of modular systems, *Cambridge Univ. Press*, Cambridge, 1916.

[72] N. Matsuoka and S. Murai, Uniformly Cohen-Macaulay simplicial complexes and almost Gorenstein* simplicial complexes, *J. Algebra*, **455** (2016), 14–31.

[73] M. Miyazaki, Almost Gorenstein Hibi rings, *J. Algebra*, **493** (2018), 135–149.

[74] M. Miyazaki, Radical property of the traces of the canonical modules of Cohen-Macaulay rings, arXiv:2506.17987.

[75] M. Nagata, Local Rings, Interscience Tracts Pure Appl. Math. **13**, Wiley, New York, 1962.

[76] T. Okuma, K-i. Watanabe, and K.-i. Yoshida, Good ideals and p_g-ideals in two-dimensional normal singularities, *Manuscripta Math.*, **150** (2016), 499–520.

[77] T. Okuma, K-i. Watanabe, and K.-i. Yoshida, Rees algebras and p_g-ideals in a two-dimensional normal local domain, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **145** (2017), 39–47.

[78] T. Okuma, K.-i. Watanabe, and K.-i. Yoshida, A Geometric description of almost Gorensteinness for two-dimensional normal singularities, arXiv:2410.23911.

[79] D. Rees, Two classical theorems of ideal theory, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **52** (1956), 155–157.

[80] P. C. Roberts, Local cohomology of Segre product type rings, *J. Pure Appl. Algebra*, **219** (2015), no.3, 652–665.

[81] P. Schenzel, On the dimension filtration and Cohen-Macaulay filtered modules, Proc. of the Ferrara Meeting in honour of Mario Fiorentini, University of Antwerp, Wilrijk, Belgium, 1998, 245–264.

[82] R. Y. Sharp, David Rees, FRS 1918–2013, *Bull. London Math. Soc.*, **48** (2016), 557–576.

[83] Y. Shimoda, A note on Rees algebras of two-dimensional local domains, *J. Math. Kyoto Univ.*, **19** (1979), 327–333.

[84] A. Simis, K. Smith, B. Ulrich, An algebraic proof of Zak's inequality for the dimension of the Gauss image, *Math. Z.*, **241** (2002), 871–881.

[85] A. Simis, B. Ulrich, and W. V. Vasconcelos, Rees algebras of modules, *Proc. London Math. Soc.*, **87** (2003), no.3, 610–646.

[86] R. P. Stanley, Combinatorics and commutative algebra, Second edition, Birkhaüser, Boston, 1996.

[87] J. Stückrad, On the Buchsbaum property of Rees and form modules, *Beiträge zur Algebra und Geometrie*, **19** (1985), 83–103

[88] J. Stückrad and W. Vogel, Eine Verallgemeinerung der Cohen-Macaulay Ringe und Anwendungen auf ein Problem der Multiplizitätstheorie, *J. Math. Kyoto Univ.*, **13** (1973), 513–528.

[89] J. Stückrad and W. Vogel, Über das Amsterdamer Programm von W. Gröbner und Buchsbaum Varietäten, *Monatsh. Math.*, **78** (1974), 433–445.

[90] J. Stückrad and W. Vogel, Buchsbaum rings and applications, An interaction between algebra, geometry and topology, Springer-Verlag, Berlin, 1986.

[91] T. Svanes, Coherent cohomology on Schubert subschemes of flag schemes and applications, *Adv. Math.*, **14** (1974), 369–453.

[92] I. Swanson and C. Huneke, Integral Closure of Ideals, Rings, and Modules, *Cambridge University Press*, Cambridge, 2006.

[93] N. Taniguchi, On the almost Gorenstein property of determinantal rings, *Comm. Algebra*, **46** (2018), no.3, 1165–1178.

[94] N. Taniguchi, T. T. Phuong, N. T. Dung, and T. N. An, Sequentially Cohen-Macaulay Rees algebras, *J. Math. Soc. Japan*, **69** (2017), no.1, 293–309 .

[95] N. Taniguchi, T. T. Phuong, N. T. Dung, and T. N. An, Topics on sequentially Cohen-Macaulay modules, *J. Comm. Algebra*, **10** (2018), no.2, 295–304.

[96] N. V. Trung and S. Ikeda, When is the Rees algebra Cohen-Macaulay?, *Comm. Algebra*, **17** (1989), 2893–2922.

[97] G. Valla, Certain graded algebras are always Cohen-Macaulay, *J. Algebra*, **42** (1976), 537–548.

[98] W. V. Vasconcelos, Arithmetic of Blowup Algebras, London Math. Soc. Lecture Note Ser., Vol **195**, *Cambridge University Press*, Cambridge, 1994.

[99] W. V. Vasconcelos, Integral closure. Rees algebras, Multiplicities, Algorithms, *Springer Monogr. Math.*, Springer-Verlag, Berlin, 2005.

[100] J. K. Verma, Joint reductions and Rees algebras, *Math. Proc. Camb. Philos. Soc.*, **109** (1991) 335–342.

[101] D. Q. Viet, A note on the Cohen-Macaulayness of Rees Algebra of filtrations, *Comm. Algebra*, **21** (1993), 221–229.

[102] W. Vogel, Über eine Vermutung von D. A. Buchsbaum, *J. Algebra*, **25** (1973), 106–112.

[103] J. Weyman, Cohomology of vector bundles and syzygies, *Cambridge University Press*, Cambridge, 2003.

[104] O. Zariski, Polynomial ideals defined by infinitely near base points, *Amer. J. Math.*, **60** (1938), no.1, 151-204.

[105] O. Zariski and P. Samuel, Commutative Algebra Volume II, *Springer*, 1960.

[106] 後藤四郎, Blow-up 代数の可換環論 –Cohen-Macaulay 性解析の視点から–, 第 51 回代数学シンポジウム報告集, 2006 年

[107] 後藤四郎, Gorenstein 環について, 『数学』（日本数学会）, **31** (1979), no. 4, 349–364.

[108] 後藤四郎, 渡辺敬一, 『可換環論』, 日本評論社, 2011 年

[109] 居相真一郎, ブローアップ代数のゴレンシュタイン性について, 第 67 回代数学シンポジウム報告集, 2022 年

[110] 谷口直樹, Almost Gorenstein rings, 第 61 回代数学シンポジウム報告集, 2016 年

[111] 松岡直之, 2 次元単項式イデアルの Ratliff-Rush 閉包と Rees 代数の Buchsbaum 性について, 第 26 回可換環論シンポジウム報告集, (2005), 19–28.

[112] 渡辺敬一, 日高文夫, 『特異点論における代数的手法』, 共立出版, 2024 年