

Huneke–Wiegand Conjecture *

谷口 直樹（明治大学大学院理工学研究科）

本講演の目的は、 R が整域のとき、2つの torsionfree な有限生成 R -加群 M, N のテンソル積 $M \otimes_R N$ がいつ再び torsionfree になるかという問いを解析することにある。この問題は、非可換環論における未解決問題の一つである中山予想まで遡るようである。中山予想は、提起されてからすでに数十年は経過していると考えられるが、未解決のままであって、基礎環が可換の場合には、Auslander–Reiten 予想として、表現論の分野で深い研究が続けられている。

予想 1 (Auslander–Reiten 予想 [1]). R は可換 Noether 環、 M は有限生成 R -加群とする。

$$\text{Ext}_R^i(M, R) = (0), \text{Ext}_R^i(M, M) = (0), \forall i > 0$$

なら、 R -加群 M は射影的である。

本研究の最終目標である次の Huneke–Wiegand 予想は、Auslander–Reiten 予想から派生したものである。

予想 2 (Huneke–Wiegand 予想 [3]). R は Gorenstein 局所整域とし、 M は有限生成 R -加群で MCM とする。 $M \otimes_R \text{Hom}_R(M, R)$ が torsionfree なら、 M は自由 R -加群である。

C. Huneke と R. Wiegand [3] は、予想 2 が正しいなら予想 1 は Gorenstein 局所整域上で正しいことを示しただけではなく、予想 2 は 1 次元に帰着できることを示している：

事実 3 ([3]). 予想 2 がすべての 1 次元の Gorenstein 局所整域について正しいなら、予想 2 はすべての Gorenstein 局所整域について正しい。

本研究は、この事実 3 を出発点としている。今回は次の形に限定して問題を考察したい。

予想 4. R は 1 次元 Gorenstein 局所整域、 I は R のイデアルで $I \neq (0)$ とする。 R -加群 $I \otimes_R \text{Hom}_R(I, R)$ が torsionfree なら、 $I \cong R$ である。

予想 4 は、1 次元の Huneke–Wiegand 予想を、加群 M の階数が 1 の場合に限って 解決しようとする試みであるが、この予想も環 R が体上の数値半群環の場合でさえ、一般には未解決のようである ([2, 4])。

次の予想 5 は、予想 4 の変形の一つである。

*後藤 四郎教授（明治大学理工学部）との共同研究である。

予想 5. R は 1 次元 Noether 完備局所整域, I は R のイデアルで $I \neq (0)$ とする. R -加群 $I \otimes_R \text{Hom}_R(I, K_R)$ が torsionfree なら, $I \cong R$ であるか, または $I \cong K_R$ である. ここで, K_R は環 R の正準加群を表す.

予想 5 が正しいなら, 予想 4 は 1 次元 Gorenstein 完備局所整域については正しい. これらを踏まえて, 本講演では次の結果の証明を報告をしたい.

定理 6. R は 1 次元 Noether 完備局所整域, I は R のイデアルで $I \neq (0)$ とする. R -加群 $I \otimes_R \text{Hom}_R(I, K_R)$ は torsionfree と仮定する. このとき, $e(R) \leq 4$ か又は $\mathfrak{m}\bar{R} \subseteq R$ なら, $I \cong R$ かまたは $I \cong K_R$ である. ここで, $e(R)$ は環 R の重複度を表し, \bar{R} は R の正規化を表わす.

この定理から, 体 k 上の Gorenstein 数値半群環

$$R = k[[t^a, t^{a+1}, \dots, t^{2a-2}]] \quad (a \geq 3)$$

内のイデアルについては, 予想 4 が正しいことが従う.

また, R は体上の数値半群環と仮定し, イデアル I を単項式で生成されたものに限るなら, 上の定理は, $e(R) \leq 7$ で正しい. 時間があれば, これらについても触れたいと思う.

参考文献

- [1] O. Celikbas and R. Takahashi, *Auslander-Reiten conjecture and Auslander-Reiten duality*, arXiv:1112.6201v1.
- [2] P. A. García-Sánchez and M. J. Leamer, *Huneke-Wiegand conjecture for complete intersection numerical semigroup rings*, to be published.
- [3] C. Huneke and R. Wiegand, *Tensor products of modules, rigidity and local cohomology*, Math. Scand., **81** (1997), 161-183.
- [4] M. J. Leamer, *Torsion and tensor products over domains and specialization to semigroup rings*, arXiv:1112.2896v1.