1 次元局所環の $\mathfrak{m}$-準素イデアルの Hilbert 係数*

谷口直樹（明治大学理工学部）

A は可換 Noether 局所環で次元 d とし，$\mathfrak{m}$ を極大イデアルとする．環 A 内の $\mathfrak{m}$-準素イデアル I に対し，函数 $\ell_A(A/I^{n+1})$ $(n \geq 0)$ をイデアル I の Hilbert 函数と呼ぶ．ここで，$\ell_A(A/I^{n+1})$ は，A-加群 A/I^{n+1} の長さを表す．Hilbert 函数は十分大なる整数 $n \gg 0$ に対し，等式

$$\ell_A(A/I^{n+1}) = \mathrm{e}_0(I)\binom{n+d}{d} - \mathrm{e}_1(I)\binom{n+d-1}{d-1} + \cdots + (-1)^d\mathrm{e}_d(I)$$

で与えられる．但し，$\{\mathrm{e}_i(I)\}_{0\leq i\leq d}$ は整数である．右辺の多項式をイデアル I の Hilbert 多項式と呼び，整数 $\mathrm{e}_i(I)$ を I の第 i–Hilbert 係数と呼ぶ．なかでも，最高次の係数である正整数 $\mathrm{e}_0(I)$ は，イデアル I に関する環 A の重複度と呼ばれ，これまでに深い研究が行われている．

Hilbert 函数の挙動は，そのイデアルのみならず基礎環 A の性質を反映することが知られており，局所環の構造解析のための主要な指標の一つとなっている。本講演の目的は，$d = 1$ の場合の第 1–Hilbert 係数 $\mathrm{e}_1(I)$ の挙動解析にある．

イデアルの第 1–Hilbert 係数については，[6, 7] など，先行する多くの研究がある．巴系イデアルに関しては，環の Cohen-Macaulay 性との関りで，1960 年代に完成度の高い研究が行われて以降，あまり大きな進展は無かったと思われる．しかしながら最近，後藤四郎，大関一秀，W. V. Vasconcelos 達によって，巴系イデアルの第 1–Hilbert 係数の研究が再開され，興味深い成果が得られるに至った（[1, 2, 9, 10]）．彼らの研究によって，巴系イデアルの第 1–Hilbert 係数の取り得る値には，局所環の個性が鋭く反映されることが明らかになるなど，Hilbert 係数解析の重要性が改めて確認されたと言うことができる．

私の講演では，一般の $\mathfrak{m}$-準素イデアルの Hilbert 係数について，1 次元の場合に限って，その挙動を調べる方法を紹介したい．後藤四郎，松岡直之，Tran Thi Phuong [5] による Almost Gorenstein rings の理論やその高次元化 [3], また [1, 2, 8, 9, 4] など，Hilbert 係数 $\mathrm{e}_1(I)$ に関する結果はその多くが 1 次元の場合に帰着できることを考えるとき，私達の方法と結果も，高次元の局所環上の Hilbert 函数解析の基礎理論として，一定の役割を果たすと期待される．

主定理は，以下のとおりである．

定理 1. $(A, \mathfrak{m})$ は 1 次元の Noether 局所環とする．このとき，等式

*後藤四郎先生の指導下に行われた，小浦あす貴氏との共同研究を基盤にしています．

$$\sup\{\mathrm{e}_1(I) \mid I \text{ は } A \text{ の } \mathfrak{m}\text{-準素イデアル}\} = \ell_B(\overline{B}/B) - \ell_A(\mathrm{H}^0_{\mathfrak{m}}(A))$$

が成り立つ．但し，B は環 $A/\mathrm{H}^0_{\mathfrak{m}}(A)$ の $\mathfrak{m}/\mathrm{H}^0_{\mathfrak{m}}(A)$-進位相に関する完備化 $\widehat{A/\mathrm{H}^0_{\mathfrak{m}}(A)}$ を表し，$\overline{B}$ は環 B の全商環 $\mathrm{Q}(B)$ 内での整閉包を表す．

系 1. 集合

$$\Lambda(A) = \{\mathrm{e}_1(I) \mid I \text{ は } A \text{ の } \mathfrak{m}\text{-準素イデアル}\}$$

が有限であるための必要十分条件は，整閉包 $\overline{B}$ が環 B 上の加群として有限生成であること，即ち，局所環 $A/\mathrm{H}^0_{\mathfrak{m}}(A)$ が analytically unramified であることである．

系 2. A は一般の Noether 局所環で $d = \dim A > 0$ なるものとする．I を環 A の $\mathfrak{m}$-準素イデアルとすれば，任意の整数 $k \geq 1$ について

$$\mathrm{e}_0(I^k) = k^d{\cdot}\mathrm{e}_0(I), \quad \mathrm{e}_1(I^k) = \frac{d-1}{2}{\cdot}\mathrm{e}_0(I){\cdot}k^d + \frac{2\mathrm{e}_1(I) - \mathrm{e}_0(I){\cdot}(d-1)}{2}{\cdot}k^{d-1}$$

が成り立つ．故に，集合 $\Lambda(A) = \{\mathrm{e}_1(I) \mid I \text{ は } A \text{ の } \mathfrak{m}\text{-準素イデアル}\}$ が有限なら，$d = 1$ であって，環 $A/\mathrm{H}^0_{\mathfrak{m}}(A)$ は analytically unramified である．

$\dim A = 1$ の場合に戻り，集合 $\Lambda(A)$ が無限である例を述べておく．

例 3. $k[[X,Y]]$ は体 k 上の冪級数環とし，$A = k[[X,Y]]/(Y^2)$ とすると，$\Lambda(A) = \{n \mid 0 \leq n \in \mathbb{Z}\}$ であって，もちろん $\sup \Lambda = \infty$ である．

他に，直ちに得られる系と例を述べておく．

系 4. $a_1, a_2, \ldots, a_\ell$ は正整数で，$\mathrm{GCD}(a_1, a_2, \ldots, a_\ell) = 1$ とする．$k[[t]]$ は体 k 上の形式的冪級数環とし，$A = k[[t^{a_1}, t^{a_2}, \ldots, t^{a_\ell}]]$，$H = \left\langle \sum_{i=1}^{\ell} c_i a_i \mid 0 \leq c_i \in \mathbb{Z} \right\rangle$ とおく．このとき，$\Lambda(A) = \{0, 1, \ldots, q\}$ である．但し $q = \sharp(\mathbb{N} \setminus H)$ とする．

系 5. $n \geq 1$ は整数とし，$A = k[[t^n, t^{n+1}, \ldots, t^{2n-1}]]$ とする．このとき

$$I = (t^n, t^{n+1}, \ldots, t^{2n-2})$$

は環 A の正準イデアルであって，

$$\mathrm{e}_1(I) = \begin{cases} \mathrm{r}(A) - 1 & (n = 1, 2), \\ \mathrm{r}(A) & (n \geq 3) \end{cases}$$

である．但し，$\mathrm{r}(A)$ は環 A の Cohen–Macaulay 型 $\ell_A(\mathrm{Ext}^1_A(A/\mathfrak{m}, A))$ を表す．

例 6. K/k は有限次体拡大で，K と k の間には真の中間体が含まれていないとする．$K[[t]]$ を体 K 上の形式的冪級数環とし，$A = k[[Kt]] \subseteq K[[t]]$ とおくと

$$\Lambda(A) = \{0, n-1\}$$

である．但し $n = [K : k]$ である．従って，$n \geq 2$ であっても $\sharp\Lambda(A) = 2$ となり，集合 $\Lambda(A)$ が非常に小さいことが分かる．

講演では，他にも具体的に与えられた局所環 A に対し，集合 $\Lambda(A)$ がどのように変化するか，報告したい．

参考文献

[1] L. Ghezzi, S. Goto, J. Hong, K. Ozeki, T. T. Phuong and W. V. Vasconcelos, *Cohen–Macaulayness versus the vanishing of the first Hilbert coefficient of parameter ideals*, J. London Math. Soc., **81** (2010), 679-695.

[2] L. Ghezzi, S. Goto, K. Ozeki, J. Hong, T.T. Phuong, and W. V. Vasconcelos, *Variation of the first Hilbert coefficients of parameters with a common integral closure*, Journal of Pure and Applied Algebra, **16** (2012) 216–232.

[3] S. Goto, *Almost Gorenstein rings – an attempt towards higher dimensional cases –*, Preprint 2011.

[4] S. Goto, J. Hong, and M. Mandal, *The positivity of the first normalized Hilbert coefficients*, The Proceedings of the American Mathematical Society, **139** (2011), 2399–2406

[5] S. Goto, N. Matsuoka, and T. T. Phuong, *Almost Gorenstein rings*, Preprint 2011.

[6] S. Goto, K. Nishida, and K. Ozeki, *Sally modules of rank one*, Michigan Math. J., **57** (2008), 359–381.

[7] S. Goto, K. Nishida, and K. Ozeki, *The structure of Sally modules of rank one*, Mathematical Research Letters, **15** (2008), 881–892.

[8] S. Goto and K. Ozeki, *The structure of Sally modules - towards a theory of non-Cohen-Macaulay cases* - J. Algebra, **324** (2010), 2129-2165.

[9] S. Goto and K. Ozeki, *Buchsbaumness in local rings possessing constant first Hilbert coefficients of parameters*, Nagoya Math. J., **199** (2010), 95-105.

[10] S. Goto and K. Ozeki, *Uniform bounds for Hilbert coefficients of parameters*, "Commutative Algebra and its Connections to Geometry (PASI 2009)", Contemporary Mathematics of AMS, **555** (2011), 97–118.