

第1章 重力が関わる天体物理の基礎

1.1 ビリアル定理

系の運動が有界 (空間のある領域内だけに限られている場合) で、かつポテンシャルエネルギーが座標の同次関数である時、ビリアル定理なるものが成り立つことを確かめてみる。 a 個の質点の運動エネルギー $T = \frac{1}{2} \sum_a m_a v_a^2$ を速度 v_a で偏微分すると、

$$\sum_a \frac{\partial T}{\partial v_a} = \sum_a m_a v_a \quad (1.1)$$

となり、これに v_a を掛けると、

$$\sum_a v_a \frac{\partial T}{\partial v_a} = \sum_a m_a v_a^2 = 2T \quad (1.2)$$

となるが、左辺は運動量の定義から

$$\sum_a v_a \frac{\partial T}{\partial v_a} = \sum_a \frac{dr_a}{dt} \cdot p_a = \frac{d}{dt} \left(\sum_a p_a \cdot r_a \right) - \sum_a r_a \cdot \dot{p} \quad (1.3)$$

となるため、上式と組み合わせると、

$$2T = \frac{d}{dt} \left(\sum_a p_a \cdot r_a \right) - \sum_a r_a \cdot \dot{p} \quad (1.4)$$

が得られる。この等式を時間に関して平均してみる。まず、時間についての任意の関数 $f(t)$ の平均値を

$$\bar{f} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f(t) dt \quad (1.5)$$

と定義する。ここで、 $f(t)$ が有界な (つまり無限の値を取ることがない) 関数 $F(t)$ の時間についての導関数 $dF(t)/dt$ であると、その平均値はゼロになってしまう。実際に、

$$\bar{f} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \frac{dF}{dt} dt = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{F(\tau) - F(0)}{\tau} = 0 \quad (1.6)$$

となることが分かるだろう (分子 $F(x) - F(0)$ は有界なのに対して、分母は無限大なので)。このような条件を考えれば、(1.4) を少し変形することができる。例えば今、空間の限られた領域の中で、しかも有限の速さで運動している状況を考えている。この場合、 $\sum_a p_a \cdot r_a$ は有界であるので消えて、

$$2\bar{T} = - \overline{\sum_a r_a \cdot \dot{p}} \quad (1.7)$$

となる (時間平均をとっている)。ニュートンの式にしたがって $dp/dt = -\partial U/\partial r_a$ と置き換えると、

$$2\bar{T} = \overline{\sum_a r_a \cdot \frac{\partial U}{\partial r_a}} \quad (1.8)$$

が得られる。ここでもし、ポテンシャル・エネルギーが全ての位置ベクトル r_a についての n 次の同次関数である とすると、 n 次の同時関数 f に関するオイラーの定理

$$\sum_i x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = n f(x_1, \dots, x_k) \quad (1.9)$$

があるので、これを用いて

$$2\bar{T} = n\bar{U} \quad (1.10)$$

が得られ、これがビリアル定理である。

ビリアル定理は、宇宙物理学分野ではとても重要な役割をはたしているの、いくつか例をあげながら、その面白さや重要性を議論したい。宇宙では、多くのものが重力多体系として記述されるため、色々な現象の性質をつかむためにビリアル定理がとても有効である。例えば、無数の粒子や天体の重力相互作用を考える場合が多く、重力ポテンシャルは $n = -1$ 次の座標の同次関数なので、運動エネルギーとの間に

$$2\bar{T} = -\bar{U} \quad (1.11)$$

という関係が保たれている場合が多い。この個々の粒子や天体の運動と重力ポテンシャルの簡単なつり合いの関係から、どのような事が言え、どのような発見があったかを見ていく。

1.2 宇宙でのガス収縮と星形成

天文学者・宇宙物理学者は、宇宙にある物質を多くの場合「ガス」と呼ぶ。基本的には、宇宙を構成する元素の約 90% は水素である。そのため、水素を主成分としたガスの塊を重力で押し潰して星を作り、そのような星を重力で集めて銀河を作りながら、宇宙の様々なスケールの天体が形成されている。

例えば、図 1.1 は近年打ち上げられたジェイムズ・ウェッブ宇宙望遠鏡で撮影されたへび座の星雲 M16 「わし星雲」の画像であり、太陽よりもずっと重い星が誕生しつつある現場である。実は、このような**ガス雲から星ができる条件は、力学の初歩的な知識のみで考えることができる** (本当は、もっと複雑)。

まず、唐突ではあるが脱出速度の考え方を復習する。ある質量 M の大きな天体上の質量 m の物質を上方へ速度 v で投げ込んだ時に、

$$\frac{1}{2}mv^2 \geq G\frac{Mm}{r} \quad (1.12)$$

というように重力ポテンシャルより物質の運動エネルギーが大きくなることが出来れば、物質は天体の重力圏を抜け出すことができた。これと全く同じ事を考えればよく、**ガスの塊があった時、その表面の粒子が重力圏から逃げ出せない場合、徐々にそのガス雲は重力によって収縮し星を形成する**と考えられる。

基本的にはガス雲内部の粒子は重力多体系であり、ビリアル定理にしたがって運動している。一方で、何らかの拍子に密度ムラが生じ、

$$|\bar{U}| > 2\bar{T} \quad (1.13)$$

というように、ある領域で重力ポテンシャルが優位になった場合、重力崩壊が開始する。これが星形成の始まりである。重力による収縮の力がそれに対抗する熱や磁場の全圧力 P_T の勾配による力を上回る条件は

$$\frac{P_T}{R} < \frac{GM\rho}{R^2} \Rightarrow R > \lambda_J \simeq \sqrt{\frac{P_T}{G\rho^2}} \quad (1.14)$$

というように考えられる。この P_T と ρ で決まる長さのスケール λ_J をジーンズ長という。ジーンズ長よりも大きなスケールはすべて不安定で重力収縮し、小さなスケールは安定である。要は、ある密度と圧力のガスを仮定した時、そのガス雲がこのスケールより大きければ重力収縮し、星形成が始まる。収縮可能な最小質量は、 $P_T \simeq \rho kT/m$ として、

$$M_J \sim \rho \left(\frac{\lambda_J}{2}\right)^3 \sim 10^5 \left(\frac{T}{10^2 \text{ K}}\right)^{3/2} \left(\frac{\rho}{10^{-24} \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}}\right)^{-1/2} M_\odot \quad (1.15)$$

となり、これをジーンズ質量と呼ぶ。ここで使っている $\rho = 10^{-24} \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ 、 $T = 10^2 \text{ K}$ は、平均的な HI 領域 (中性水素ガスの星間空間) のパラメータであるが、通常の星 (例えば太陽ぐらいの星) を作ろうと思うと、これよりも低温・高密度な分子雲 (冷たくて濃いガスの塊) が必要であることがわかる。

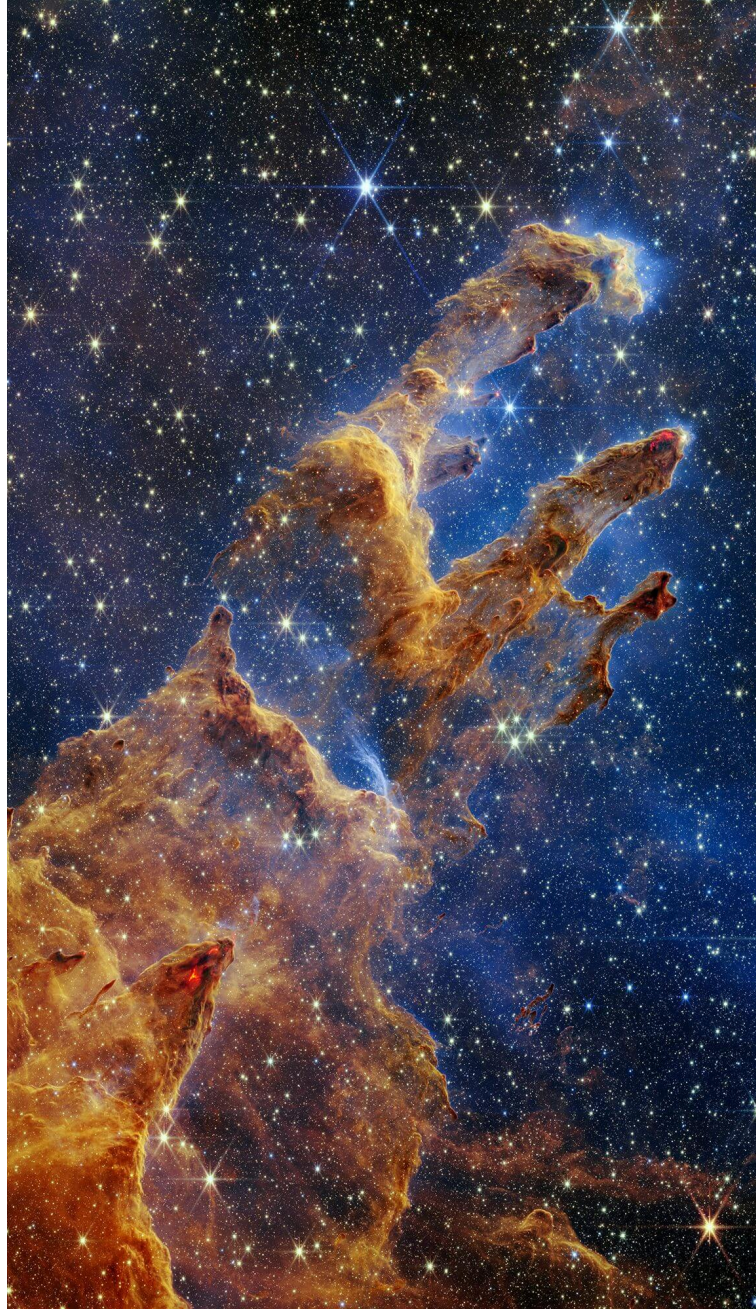


図 1.1: ジェイムズ・ウェッブ宇宙望遠鏡の近赤外線カメラ (NIRCam) で撮影された「わし星雲」の“創造の柱” Credit: NASA, ESA, CSA, STScI; Image Processing: Joseph DePasquale (STScI), Anton M. Koekemoer (STScI), Alyssa Pagan (STScI).

1.3 星の静水圧平衡と負の比熱

地球上でも、高い山に登ったり、その山から下ったりすると耳が変になり、気圧の変化を体感できる。高い場所では、気圧が低く、低い場所では気圧は高い。これは、重力で引きつけられる大気は、地表では圧力が大きくなり、より上方ではこの圧力に押され大気がどんどん薄くなっていくような圧力勾配が生まれているからである。このように重力と圧力勾配力が釣り合っている状態のことを静水圧平衡 (hydrostatic equilibrium) と呼ぶ。

恒星など、ガスからなる天体内部の静水圧平衡は、密度を ρ 、天体の中心からの距離を r 、 r での圧力を P 、万有引力定数を G 、 r より内側にある部分の質量を M_r とすると、

$$\frac{dP}{dr} = -G \frac{M_r \rho}{r^2} \quad (1.16)$$

と表せる。これは力学平衡 (運動方程式) に対応する式になっており、内側から外側までこの微分方程式を積分す

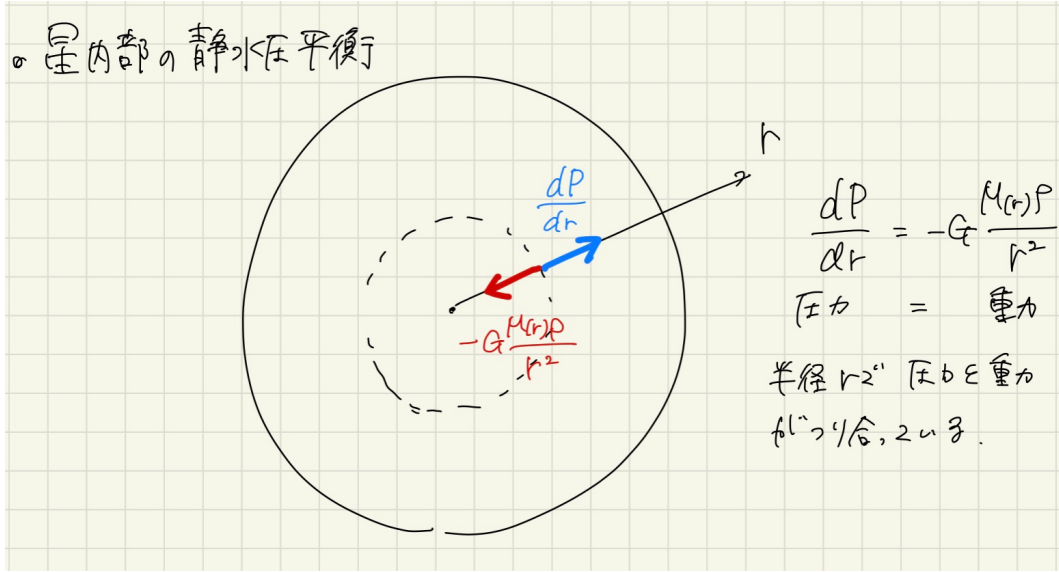


図 1.2: 星の内部での静水圧平衡のイメージ。

ることで、星の内部での力のつり合いを記述できる。星は基本的には、**重力によって内側へ向かおうとする力と、その重力によって生じるエネルギー（熱エネルギー+核融合エネルギー+輻射）で押し返す力がつり合うことで、自身を支えている。**また、質量保存の式として、

$$\frac{dM_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho \quad (1.17)$$

というものが考えられる。

さて、上式のつり合いの式に $4\pi r^3$ を掛けて星の中心から端まで積分して、質量保存の式も使うと

$$\int_0^R 4\pi r^3 \frac{dP}{dr} dr = - \int_0^R 4\pi G M_r r \rho dr = - \int_0^M \frac{G M_r}{r} dM_r \quad (1.18)$$

を得る。ここで、左辺は部分積分により

$$[4\pi r^3 P]_0^R - 3 \int_0^R 4\pi r^2 P dr \quad (1.19)$$

となるが、星の表面では $P = 0$ なので第一項は消える。第二項は、圧力 P の体積積分であるが、圧力と内部エネルギー密度 u の間には、比熱比¹を γ として

$$P = (\gamma - 1)u \quad (1.20)$$

という関係があるので、これを使う。**(補足始)** この関係は熱力学から得られるので、力学から外れてしまうが、理想気体の状態方程式 $PV = Nk_B T$ から考えている。定圧比熱² C_P と定積比熱³ C_V の間には、 $C_P - C_V = Nk_B$ が成り立つので、

$$P = \frac{N}{V} k_B T = \frac{C_P - C_V}{V} T = (c_P - c_V) \rho T = \frac{c_P - c_V}{c_V} \rho u = (\gamma - 1) \rho u \quad (1.21)$$

が得られる。ここで、 c_P, c_V の比熱は単位体積あたりのものを示している。また、 $u \equiv c_V T$ は、内部エネルギー密度（単位体積あたりの内部エネルギー）である。**(補足終)**

この圧力と内部エネルギー密度の関係から、

$$-3 \int_0^R 4\pi r^2 P dr = -3(\gamma - 1)U \quad (1.22)$$

¹定圧熱容量と定積熱容量の比。断熱圧縮膨張時の圧力 P と体積 V の関係は、 $PV^\gamma = \text{一定}$ 。

²圧力一定の条件下で単位量あたりの物質を単位温度変化させるのに必要な熱量。単位量あたりのエンタルピーの変化量の傾きを表す。

³体積一定の条件下で単位量あたりの物質を単位温度変化させるのに必要な熱量。単位量あたりの内部エネルギーの変化量の傾きを表す。

となる。ここで U は星の全内部エネルギーである (これまでの言葉で言えば、系全体の運動エネルギーに近い)。一方、式 (1.18) の右辺は星の重力エネルギー Ω (これまでの言葉で言えば、系全体のポテンシャルエネルギー) を表すので、

$$\Omega - 3(\gamma - 1)U = 0 \quad (1.23)$$

という関係式を得る。これが星の内部におけるビリアル定理である。

星の全エネルギーは

$$E = U + \Omega \quad (1.24)$$

なので、この式に得られたビリアル定理を代入すると、

$$E = -(3\gamma - 4)U = \frac{3\gamma - 4}{3(\gamma - 1)}\Omega \quad (1.25)$$

となり、 $\gamma > 4/3$ ならば、星は重力的に束縛されているが、 $\gamma < 4/3$ ならば、重力的に束縛されていないことになる。すなわち、このような星は不安定であることを意味している。

星が高度 L でエネルギーを失っていくことを考えると、

$$\frac{dE}{dt} = -(3\gamma - 4)\frac{dU}{dt} = \frac{3\gamma - 4}{3(\gamma - 1)}\frac{d\Omega}{dt} = -L < 0 \quad (1.26)$$

となるので、

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} &> 0 \\ \frac{d\Omega}{dt} &< 0 \end{aligned} \quad (1.27)$$

となり、エネルギーを失っていくと、内部エネルギーは増加し、重力エネルギーは減少していく (負の方向へ向かう) ことを意味する。重力エネルギーは負であるので、星はより深く束縛されていき、内部エネルギーの増加は温度の上昇を意味する。つまり、**星はエネルギーを失えば失うほど、重力的な束縛が強くなり、温度も上昇する**。そのため「負の比熱」を持っているとも言われる。エネルギーを抜けば冷えるのが普通のように思えるが、星の場合は逆になっている。

内部の力のつり合いを考えず、もう少しシンプルに考えると、重力平衡にあると考えれば、ビリアル定理より、

$$\bar{U} + 2\bar{T} = 0 \Rightarrow \Omega + 2U = 0 \quad (1.28)$$

となるので、

$$E = \Omega + U = -U = \frac{\Omega}{2} < 0 \quad (1.29)$$

という関係も考えられ、同じく負の比熱の考察が可能である。

星の負の比熱は非常に面白い。大質量星の進化の最終段階では、熱核反応で中心領域から大量のニュートリノが放出されエネルギーが引き抜かれ、温度が上昇し進化が加速する。最終的には、中心領域で核融合ができなくなることで中心のエネルギー源がなくなり、自重を支えきれず星が潰れる。これが星の大爆発 (超新星) の原因と考えられており、この時の潰れた中心核がブラックホールや中性子星である。

1.4 ビリアル定理によるダークマターの発見

宇宙の研究においては、ビリアル定理を用いて実際に重力多体系の総質量が推定されてきた。そして、そこから現在でも分かっていない多くの謎が生まれてきている。例えば、銀河団などの天体が生まれてから十分時間が経過しており、系が安定な状態に落ち着いていると仮定すると

$$\langle T \rangle \simeq T = \sum_j \frac{1}{2} m_j v_j^2 \quad (1.30)$$

が成り立っていると考えて良い。ここで、銀河団の内部の銀河は、至るところへ向かって飛び交っていて、大気中の気体分子のようなのだとイメージすると良い。銀河団を構成する銀河の速度の2乗質量平均(速度分散)

$$\overline{v^2} = \frac{\sum_j m_j v_j^2}{\sum_j m_j} \quad (1.31)$$

と銀河団の総質量 $M = \sum_j m_j$ を用いると、

$$\langle T \rangle = \frac{1}{2} M \overline{v^2} \quad (1.32)$$

のように書き換えられる。一方、系全体の重力ポテンシャルエネルギーは、系の典型的な半径を R とすれば

$$\langle U \rangle \simeq -\frac{GM^2}{R} \quad (1.33)$$

程度と考えられる。これらの系全体の運動エネルギーとポテンシャルエネルギーから、ビリアル定理を考えると、

$$\begin{aligned} 2\langle T \rangle = -\langle U \rangle &\Rightarrow M \overline{v^2} = \frac{GM^2}{R} \\ &\Rightarrow \overline{v^2} = \frac{GM}{R} \\ &\Rightarrow M_V = \frac{G \overline{v^2}}{R} \end{aligned} \quad (1.34)$$

と変形できる。これはつまり、重力圏に束縛された天体や物質(今でいえば銀河)の典型的な半径 R 内の速度を求めれば、その系の質量を見積もることができることを意味する。このように、ビリアル定理を利用して求められる重力多体系の質量をビリアル質量 M_V と呼ぶ。

このビリアル定理自体はとてもシンプルな話に聞こえるが、宇宙の観測結果と比較し始めると、うまく説明できないケースが出てきている。それが一つ目の話題の「**ダークマター(暗黒物質)**」である。**宇宙全体において、通常の物質は約5%しか占めておらず、残りの約27%が暗黒物質、約68%が暗黒エネルギー(ダークエネルギー)である**と考えられている。そして、その残りの95%は何か全く分かっていない。

暗黒エネルギーは宇宙膨張の源として考えられている。一方、暗黒物質は、1933年にフリッツ・ツビッキーが銀河団中の銀河の軌道速度における"欠損質量" (missing mass) を説明するために仮定した未知の物質である。ツビッキーは銀河団を構成する8個の銀河について視線方向の速度を測定し、毎秒1,000 km程度の速度分散を持つと結論した。ハッブル=ルメートルの法則に基づくかみのけ座銀河団までの距離の推定値からかみのけ座銀河団の大きさを約1 Mpcと見積もることができる。また、**ビリアル定理によるとこれらの値から銀河団の質量は $3 \times 10^{14} M_\odot$ と見積もられる ($M_\odot$ は太陽質量で、約 2×10^{33} g)。驚くことに、これは光で観測できる銀河の質量の総和 $\sim 10^{12} M_\odot$ を大幅に上回っており「質量欠損問題 (missing mass problem)」として知られている。**ツビッキーはこのことから目に見えない物質すなわち暗黒物質(独: dunkle Materie)が存在するはずであると推測した(下記、論文からの引用)。

Um, wie beobachtet, einen mittleren Dopplereffekt von 1000 km/sek oder mehr zu erhalten, müsste also die mittlere Dichte im Comasystem mindestens 400 mal grösser sein als die auf Grund von Beobachtungen an leuchtender Materie abgeleitete. Falls sich dies bewahrheiten sollte, würde sich also das überraschende Resultat ergeben, dass dunkle Materie in sehr viel grösserer Dichte vorhanden ist als leuchtende Materie. (観測されたような毎秒1000 kmかそれ以上という中程度のドップラー効果を得るためには、かみのけ座銀河団の平均密度は光っている物質の観測から導かれた値の少なくとも400倍かそれ以上であるはずである。これが証明されれば、光っている物質よりもはるかに多くの暗黒物質が存在するという驚くべき結論が得られる。)

フリッツ・ツビッキー, Helvetica Physica Acta, 6, p. 125 (1933). (Wikipedia より)

同様に、銀河の回転曲線問題と言うものもある(図1.3)。これは、1980年代に明らかになった天文学の問題の一つであり"flat rotation curve problem"などとも呼ばれる。分光観測によって銀河の回転曲線(銀河中心からの半径に対して各位置での回転速度の大きさをプロットした曲線)を求めてみると、その銀河の「目に見える」(電磁波を放射・吸収している)物質分布から想定される回転速度とは大きく異なり、銀河の中心からかなり離れた周縁部でも回転速度が低下せず、平坦な速度分布をしていることが分かる。これは、現在知られている通常の物質

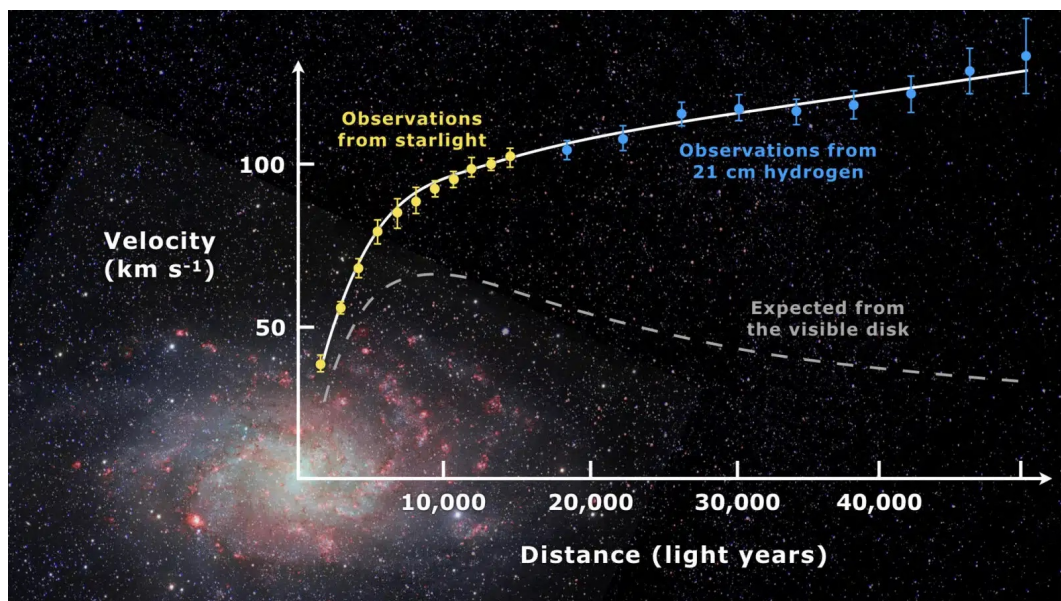


図 1.3: 銀河の回転曲線。

(バリオン)とは異なり、光を出さずに質量エネルギーのみを持つ未知の物質が銀河の質量の大半を占めていると仮定する事で説明される。これも要は**ビリアル定理的な考え方で、想定した質量では回転速度を説明できないので、未知の物質を考える必要がある**ことの発見と言える。そして、この未知の物質も暗黒物質だと考えられている。一方でこのような暗黒物質を仮定せず、力学の法則を修正することで平坦な銀河回転速度を説明しようとする試みもなされている。

暗黒物質が何であるかは未解決問題で、解明されればノーベル賞確実だろう。どちらかと言うと、暗黒物質が何か問題は、現在では宇宙物理の問題と言うよりは、素粒子物理の問題になってきており、未知の素粒子として多くの人が探している。暗黒物質を説明するような素粒子の候補としては、WIMP、ステライルニュートリノ、アクシオンなど様々だが検証する方法はまだ無い。

大質量ブラックホール周辺の星の動き

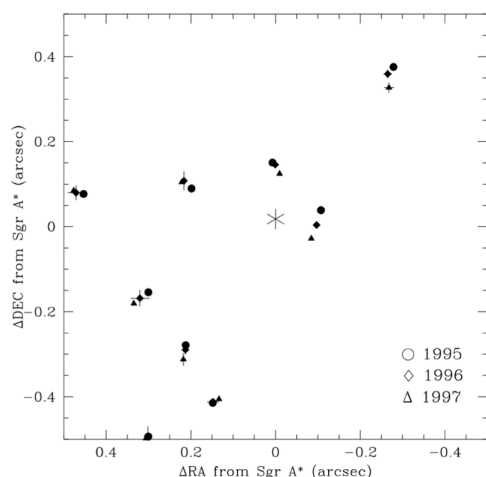


FIG. 3.—Measured positions of stars at 1 arcsec² centered on the position of Sgr A* (starred point, which depicts the location of this radio source). Significant velocities, which reach $1400 \pm 100 \text{ km s}^{-1}$, are easily detected in this region. Each year's measurement is represented by a different symbol: 1995 by triangles, 1996 by squares, and 1997 by circles.

ビリアル定理を用いた質量推定

4. CENTRAL DARK MASS

The two-dimensional positions and velocities measured for stars in the inner $6'' \times 6''$ ($0.23 \times 0.23 \text{ pc}$) provide excellent constraints on the distribution of matter at the center of the Galaxy. In principle, if all six components of the position and velocity vectors could be observed, each star would yield an estimate of the mass enclosed within its radius. With the two-dimensional projections, the individual stars provide only lower limits on the enclosed mass, $M_{\min}$, under the assumption that the stars are gravitationally bound, in which case

$$M_{\min} = \frac{v^2 R}{2G}.$$

Every star imposes a minimum mass that exceeds the enclosed mass of luminous matter extrapolated from the power-law relationship derived at larger radii by Genzel et al. (1996). Considering only stars with $v/\sigma_v \geq 4$, the minimum enclosed mass estimates reach values of $(2-3) \times 10^6 M_{\odot}$, with the apparent members of the Sgr A* cluster having an $M_{\min}$ ranging $(0.2-1) \times 10^6 M_{\odot}$ (see Fig. 6). Thus the stars appear to be moving under the influence of a gravitational potential generated by at least a few million solar masses of dark matter.

図 1.4: 銀河中心の超大質量ブラックホール周辺の星の動き (左) とビリアル定理を用いた質量推定 (右)。Ghez et al., (1998) より引用。

1.5 超巨大質量ブラックホールの発見

天の川銀河に代表されるような円盤銀河の中心には、超巨大質量ブラックホール (Super Massive Black Holes, SMBHs) が存在することが種々の銀河観測結果から示唆されている。そして、我々の住む天の川銀河にもそれは当てはまる。観測された力学的構造から、中心から半径 0.01pc より小さな領域に

$$M = (4.3 \pm 0.4) \times 10^6 M_{\odot} \quad (1.35)$$

の大質量天体が存在しなければならないと言われており、これが超巨大質量ブラックホールだと考えられている。
この超巨大質量ブラックホールの発見 (2020 年ノーベル物理学賞) にも、ビリアル定理が用いられている。

例えば、この超巨大質量ブラックホールの発見でノーベル物理学賞を受賞した Ghez は 1995 年から 2 年間、Keck 望遠鏡で K-band で観測を行い、超巨大質量ブラックホールと考えられている Sgr A* 周辺にある NSC の星 90 個の固有運動 (二次元平面上での動き) を算出した。この論文 (図 1.4)、その固有速度の大きさは $1400 \pm 100 \text{ km/s}$ にもなるとの結果を出している。その固有運動の分散とビリアル定理

$$M = \frac{Rv^2}{2G} \quad (1.36)$$

から、GC にある巨大な質量を $(2.6 \pm 0.2) \times 10^6 M_{\odot}$ と見積もった (図 1.4 右)。この質量が 10^{-6} pc^3 という狭い領域に存在しなければならないことから、Sgr A* 領域の質量密度は少なくとも $10^{12} M_{\odot} \text{ pc}^{-3}$ でなければならぬと算出した ($1 \text{ pc} \sim 3 \times 10^{16} \text{ m}$)。

1.5.1 超巨大質量ブラックホールはどこから来たのか？

基本的に宇宙に存在するブラックホールは、星を潰して作られたと思われる。(未完)