第2章　様々な“星の限界”の物理

主系列後の星や白色矮星などの天体には質量に上限が存在し、その質量を超えると重力的に不安定になると考えられている。重力的に不安定になると、星はもとの姿を保てず、大きく変化せざるを得ない。そしてこの質量限界が、主系列星から赤色 (超) 巨星への進化であったり、白色矮星の核暴走爆発、大質量星の重力崩壊など、天文学的に非常に重要な局面を特徴づけていると言える。このような天体の限界の物理について、この章では考えていく (この章は、大部分の内容を水野裕介さんの「質量限界の物理」を参考にしています)。

2.1　シェーンベルグ＝チャンドラセカール限界

前章でやったように、太陽などの主系列星は、水素の核融合 (水素燃焼) でエネルギーを生み出し輝いている。星が年老いて燃料となる水素が減っていくと、星内部ではヘリウムの割合が増える事になる。ヘリウムは重いので星の中心部に溜まるため、年老いた星はヘリウムの多い内部コアと水素の多い外層という 2 層構造を形成する。ヘリウムの核融合を起こせるほど高温でないと、内部コアのすぐ外側で水素の核融合が起きることになる。これを水素殻燃焼 (H-shell burning) という。

シェーンベルグ＝チャンドラセカール限界とは、簡単に言うと「ヘリウムコアが収縮始める時 (=主系列星と巨星の境界) のコア質量」である。コアがこの限界質量を超えると、ケルビン-ヘルムホルツ時間でコアは収縮していく。

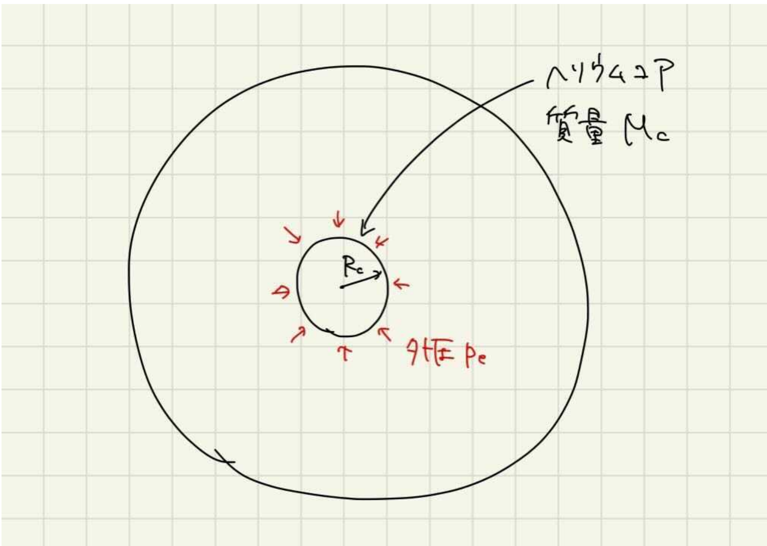

図 2.1: 星の内部で形成されるヘリウムコア。

2.1.1　外圧がある場合のビリアル定理と等温コアの上限質量

星の静水圧平衡を考えると、ビリアル定理は、

$$\Omega - 3(\gamma - 1)U = 0 \tag{2.1}$$

と書けた。これは、負の値を持つ重力エネルギー Ω と、星全体の内部エネルギー U の釣り合いを示していた。例えば、輻射などで星の内部のエネルギーを引き抜くと、逆に内部エネルギーは増加し、重力エネルギーは減少 (負の方向へ増加) するという性質があった。

少し状況を変えて、中心での水素燃焼で形成されたヘリウムコアについて考えてみる。この時、外から圧力 P_e を受けていると仮定する。この時、ビリアル定理は、

$$4\pi R_c^3 P_e - 3(\gamma - 1)U = \Omega \tag{2.2}$$

となる。ここでは、星全体で考えた時に星表面では圧力 0 だったものが、ヘリウムコアの表面では外側の物質からの外圧があるので $4\pi R_c^3 P_e$ の項が残っていると考える。

内部エネルギー U: ヘリウムコアの内部エネルギーを考える。気体分子一個の運動エネルギーは $(3/2)kT$ で、平均分子量 μ_c とすれば分子数は $M_c/\mu_c m_{\rm H}$ なので、温度 T の等温コアを考えると内部エネルギーは

$$U = \frac{3M_c kT}{2\mu_c m_{\rm H}} \tag{2.3}$$

となる。

重力エネルギー Ω: ヘリウムコアの重力エネルギーを考える。まず、簡単のために密度一定のコアを考え、

$$\rho_c = \frac{M_c}{4\pi R_c^3/3} \tag{2.4}$$

とすると、重力エネルギーは

$$\begin{aligned}
\Omega &= -\int_0^{R_c} 4\pi r^3 \rho_c \frac{GM_r}{r} dr \\
&= -\int_0^{R_c} 4\pi r^3 \rho_c \frac{G\rho_c 4\pi r^3/3}{r^2} dr \\
&= -\frac{(4\pi\rho_c)^2 G}{3} \int_0^{R_c} r^4 dr \\
&= -\frac{3}{5}\frac{GM_c^2}{R_c}
\end{aligned} \tag{2.5}$$

と表せる。(適当な係数として 3/5 を α などと置いても良い)

もう一度、ビリアル定理に戻って考える。単原子分子の理想気体であると仮定すれば $\gamma = 5/3$ なので、

$$\begin{aligned}
4\pi R_c^3 P_e &= 2U + \Omega \\
&= \frac{3M_c kT}{\mu_c m_{\rm H}} - \frac{3}{5}\frac{GM_c^2}{R_c} \\
\Rightarrow P_e &= \frac{3}{4\pi R_c^3}\left(\frac{M_c kT}{\mu_c m_{\rm H}} - \frac{1}{5}\frac{GM_c^2}{R_c}\right)
\end{aligned} \tag{2.6}$$

というように外圧を記述できる。この時、等温コアの温度 T は、コアのサイズには寄らず、水素燃焼温度 ($\sim 10^7$ K) で特徴づけられると考えれば、この式は、コア質量 M_c を与えた時の外圧 P_e と半径 R_c の関係である。

コア質量 M_c を固定して、R_c を変化させる時、P_e が最大となる条件を求めてみる。そのために、P_e を R_c で微分した量が 0 となる条件を考えると、

$$\begin{aligned}
\frac{dP_e}{dR_c} &= -\frac{9M_c kT}{4\pi\mu_c m_{\rm H}} R_c^{-4} + \frac{3}{5}\frac{GM_c^2}{\pi} R_c^{-5} \\
&= \left(-\frac{9M_c kT}{4\pi\mu_c m_{\rm H}} + \frac{3}{5}\frac{GM_c^2}{\pi} R_c^{-1}\right) R_c^{-4} = 0
\end{aligned} \tag{2.7}$$

となり、上式の括弧内を 0 にすれば良いので、

$$\begin{aligned}
\frac{9M_c kT}{4\pi\mu_c m_{\rm H}} R_c &= \frac{3}{5}\frac{GM_c^2}{\pi} \\
R_c &= \frac{4}{15}\frac{G\mu_c m_{\rm H} M_c}{kT}
\end{aligned} \tag{2.8}$$

で外圧最大となり、その時の P_e は、この R_c を式 (2.6) に代入して、

$$\begin{aligned}
P_e &= \frac{3}{16}\left(\frac{15}{4}\right)^3 \frac{1}{\pi G^3 M_c^2}\left(\frac{kT}{\mu_c m_{\rm H}}\right)^4 \\
&\simeq \frac{\pi}{G^3}\left(\frac{kT}{\mu_c m_{\rm H}}\right)^4 \cdot M_c^{-2}
\end{aligned} \tag{2.9}$$

となる。この式から、ヘリウムコアの質量 M_c の増加に対して、外圧の最大値は減少することがわかる。つまり、与えられた外圧に対して、支えることのできるコアの質量には上限値が存在することを意味している。そのため、ヘリウムコアが大きくなっていくと、ある時点からは内部エネルギーで重力エネルギーと外圧を支えきれず、ヘリウムコアは重力的に不安定となり収縮を開始する。

では、今まで任意の外圧 P_e を考えてきたが、ヘリウムコアより外側の層からの外圧について具体的に考えてみる。静水圧平衡と質量保存則より

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dr} &= -G\frac{M_r\rho}{r^2} \\ \frac{dM_r}{dr} &= 4\pi r^2\rho \end{aligned} \tag{2.10}$$

なので、この上の式を下の式で割って、

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dM_r} &= -\frac{GM_r}{4\pi r^4} \\ \Rightarrow dP &= -\frac{GM_r}{4\pi r^4}dM_r \end{aligned} \tag{2.11}$$

が得られる。これを用いて、コアの表面から星の表面まで積分してあげると

$$\begin{aligned} P_e &= \int_0^{P_e} dP = -\int_M^{M_e} \frac{GM_r}{4\pi r^4}dM_r \\ &\approx -\frac{G(M_e^2 - M^2)}{8\pi\left\langle r^4\right\rangle} \\ &\approx \frac{GM^2}{4\pi R^4} \end{aligned} \tag{2.12}$$

となる。ここで $\left\langle r^4\right\rangle \sim R^4/2,\ M_e \ll M$ と仮定している。ここで、理想気体の状態方程式より、

$$P = nkT = \frac{\rho}{\mu_e m_p}kT \tag{2.13}$$

を用いて、外層の密度を

$$\rho_e = \frac{P_e\mu_e m_{\mathrm{H}}}{kT_c} \tag{2.14}$$

と書ける。一様密度を仮定しているので $M = 4/3\pi R^3\rho_e$ となり、これを式 (2.12) の一つの M だけに代入すると

$$\begin{aligned} P_e &\approx \frac{GM^2}{4\pi R^4} \\ &= \frac{GM\rho_e}{3R} \\ &= \frac{GM}{3R}\frac{P_e\mu_e m_{\mathrm{H}}}{kT_c} \\ \Rightarrow R &= \frac{GM\mu_e m_{\mathrm{H}}}{3kT_c} \end{aligned} \tag{2.15}$$

この星の半径 R を再度、P_e の式に代入すると、

$$P_e \approx \frac{GM^2}{4\pi R^4} = \frac{81}{4\pi}\frac{1}{G^3M^2}\left(\frac{kT}{\mu_e m_{\mathrm{H}}}\right)^4 \tag{2.16}$$

というように外圧が求まる。要は、式 (2.9) と式 (2.18) が等しくなる点が臨界点となり、そこから

$$q_c \equiv \frac{M_c}{M} \sim 0.49\left(\frac{\mu_e}{\mu_c}\right)^2 \tag{2.17}$$

が求まる。コアと外層の平均分子量を $\mu_c \sim 1.34, \mu_e \sim 0.63$ とおくと、$q_c \sim 0.11$ となり、コアの質量が星全体の質量の約１割を超えると、コアが収縮することが分かる。今回の計算では、様々な仮定を置いたが、より正確な計算を行うと、

$$q_c \lesssim 0.37\left(\frac{\mu_e}{\mu_c}\right)^2 \tag{2.18}$$

となる。

2.1.2 問題

上のシェーベルグ=チャンドラセカール限界の導出の際、「等温コア」で「一様密度」を仮定した。この仮定の問題点を端的に示せ。