

2023年度 力学1 テキスト

# 解析力学ノート

明治大学 理工学部物理学科

佐藤寿紀

2023年8月24日

# 目次

<b>第 1 章</b>	<b>ニュートン力学の復習と解析力学への導入</b>	<b>1</b>
1.1	はじめに: 授業「力学 1」「力学 1 演習」の説明	1
1.2	なぜ、解析力学を学ぶのか?	1
1.3	ニュートン力学の復習と座標系	2
1.3.1	ニュートン力学の復習	2
1.3.2	保存則	3
1.3.3	座標系 (1): デカルト座標	4
1.3.4	座標系 (2): 極座標	5
1.3.5	座標系 (3): 円筒座標	5
1.4	ニュートンの運動方程式は面倒くさい	5
1.4.1	デカルト座標の場合	6
1.4.2	二次元極座標の場合	6
1.4.3	円筒座標の場合	7
1.4.4	なぜ、面倒くさかったのか?	7
<b>第 2 章</b>	<b>Lagrangian と Lagrange 方程式</b>	<b>8</b>
2.1	まず手を動かしてみよう	8
2.2	Lagrangian とは何か?	8
2.3	Lagrange 方程式を解いてみよう	8
2.3.1	落下する質点	9
2.3.2	一次元調和振動子	9
2.3.3	単振り子	9
2.3.4	両端をばねでつながれた 2 つの質点 (連成振動)	10
2.3.5	静電磁場下の電荷の運動	10
2.4	結局、Lagrangian とは何か?	11
<b>第 3 章</b>	<b>ダランベールの原理と Lagrange 方程式</b>	<b>13</b>
3.1	ニュートンの法則から Lagrange 方程式を導こう	13
3.2	仮想仕事の原理とダランベールの原理	14
3.2.1	拘束条件と一般化座標	14
3.2.2	仮想仕事の原理	14
3.2.3	ダランベールの原理	15
3.2.4	ホロノーム系に対する Lagrange 方程式	15
3.3	簡単なまとめ	16
<b>第 4 章</b>	<b>最短経路問題と変分法</b>	<b>17</b>
4.1	最短経路問題	17
4.2	微分と変分	17
4.3	Euler 方程式	18
4.4	Euler 方程式と Lagrange 方程式	19
<b>第 5 章</b>	<b>最小 (停留) 作用の原理</b>	<b>20</b>
5.1	最小作用の原理 (ハミルトンの原理)	20
5.2	Euler-Lagrange 方程式の導出	20
5.2.1	作用の例: 電磁場の作用	21
5.2.2	作用の例: 重力場の作用	21

<b>第 6 章 Lagrange 方程式の共変性</b>	<b>22</b>
6.1 ニュートンの運動方程式は面倒くさかった	22
6.2 ニュートンの運動方程式の共変性	22
6.2.1 座標系の回転	22
6.2.2 ガリレイ変換	24
6.3 Lagrange 方程式の共変性	24
6.3.1 Lagrange 方程式の点変換における共変性	26
<b>第 7 章 対称性と保存則 (1): 運動の積分</b>	<b>27</b>
7.1 運動の積分	27
7.1.1 循環座標	27
7.1.2 例 1: 非保存力下での質点の運動	27
7.1.3 例 2: 万有引力を受けて運動する物体の運動方程式	28
7.2 対称性と保存則	28
7.2.1 時間の一様性とエネルギー保存則	29
7.2.2 空間の一様性と運動量保存則	29
7.2.3 時間の等方性と角運動量保存則	30
<b>第 8 章 対称性と保存則 (2): ネーターの定理</b>	<b>31</b>
8.0.1 空間の一様性: 運動量保存則	31
8.0.2 空間の等方性: 角運動量保存則	31
8.0.3 時間の一様性: エネルギー保存則	32
<b>第 9 章 Lagrangian の任意性, ビリアル定理</b>	<b>33</b>
9.1 Lagrangian の任意性	33
9.1.1 ガリレイの相対性原理でみる任意性	33
9.1.2 力学的相似則	35
9.2 ビリアル定理	36
<b>第 10 章 ビリアル定理と宇宙物理学</b>	<b>38</b>
10.1 宇宙でのガス収縮と星形成	38
10.2 星の静水圧平衡と負の比熱	39
10.3 ビリアル定理によるダークマターの発見	41
10.4 超巨大質量ブラックホールの発見	44
10.4.1 超巨大質量ブラックホールはどこから来たのか?	44
<b>第 11 章 拘束条件と Lagrange の未定乗数法</b>	<b>45</b>
11.1 拘束条件の復習と独立条件による扱い	45
11.2 Lagrange の未定乗数法	45
11.2.1 二次元座標で一つの拘束条件を持つ場合	45
11.2.2 一般の場合	46
11.3 Lagrange の未定乗数法を使った具体例	46
11.3.1 斜面を転がる車輪	46
11.3.2 円環の内側を運動する質点	47
<b>第 12 章 Hamilton の正準方程式と Legendre 変換</b>	<b>50</b>
12.1 共役運動量	50
12.2 Hamilton の正準方程式	50
12.3 Legendre 変換と Lagrangian の凸性	51
12.4 位相空間	53
<b>第 13 章 正準変換と Hamilton-Jacobi 理論</b>	<b>54</b>
13.1 正準変換	54
13.2 Hamilton-Jacobi 方程式	56
13.2.1 平面上の中心力ポテンシャル下の質点 (二次元ケプラー問題)	58

第 14 章 (おまけ) ポアソン括弧	59
第 15 章 (おまけ) シンプレクティック条件とリウヴィルの定理	60
第 16 章 (おまけ) オストログラドスキーの定理	61
16.1 $\dot{q}$ を含む Lagrange 方程式 . . . . .	61
16.2 オストログラドスキーの定理の具体例 . . . . .	62
第 17 章 (おまけ) Hamilton-Jacobi 方程式と Schrödinger 方程式	63
第 18 章 (おまけ) シンプレクティック数値積分	64
第 19 章 (おまけ) Lagrangian が存在しない系	65
第 20 章 (おまけ) 三次元ケプラー問題と Hamilton-Jacobi 方程式	66
第 21 章 (おまけ) ラグランジュ点	67
第 22 章 (おまけ) 2 次元曲面上の測地線	68
第 23 章 (おまけ) 二重振り子を Python で解く	69

# 第1章 ニュートン力学の復習と解析力学への導入

## 1.1 はじめに: 授業「力学1」「力学1演習」の説明

力学1と力学1演習とは一体であり、期末試験も同時に行う。力学1演習用の演習問題は講義が終わった後に配布し、Oh!-Meijiでも提示する。解答は次の週の演習の時間前(9:00)までに Oh!-Meiji にて提出すること。ファイル形式は jpeg などの画像でもよいが、できるだけ PDF 形式で提出すること。採点結果は次の週までに Oh!-Meiji にてフィードバックする。演習問題は(希望した、もしくは指定した学生に)黒板に解答してもらい、授業内でその解説を行う。解答者には演習の得点として加点する。演習は前週の講義の復習となるので、**第一回目の演習はない**。クラスウェブに掲載する力学1の講義の資料(これ)を予習しておくこと。講義資料は、初回(この資料)のみ公開する。

講義内容は、「解析力学」という分野になっている。力学1では、この解析力学の概念の導出であったり、様々な計算を行うが、演習の授業ではより具体的な問題を解いて身につけてもらう。教科書は指定しないが、いくつか参考書を示しておく。

- ・「力学」ランダウ・リフシッツ: ある程度の授業の流れは、この教科書にそって行う。物理学科の学生ならだいたい一冊持っている。
- ・「解析力学・量子論」須藤靖: いくつかの章はこの教科書を参考にしている。熱統計力学の一部から量子論への流れも読みやすく、宇宙に興味がある学生にとっても良書。
- ・「解析力学」畑浩之: いくつかの章はこの教科書を参考にしている。例題もあり初学者でも理解しやすく、後半はより理論的な理解を深めたい人にも適している。
- ・「解析力学講義-古典力学を超えて-」近藤慶一: いくつかの章はこの教科書を参考にしている。場の解析力学など理論的な理解を深めたい人に適している。
- ・「解析力学」宮下精二: コンパクトに幅広い内容が収まっており良い。
- ・「解析力学」江沢洋: 標準的なテキストで買って損はない。変分原理あたりの記述は分かりやすい。
- ・「物理テキストシリーズ2 解析力学」大貫義郎: 標準的なテキストで買って損はない。
- ・「物理入門コース 解析力学」小出昭一郎: 標準的なテキストで買って損はない。上二つより少し易しめ。
- ・「よくわかる解析力学」前野昌弘: 様々な例があげられており、丁寧で理解しやすい。手を動かしながら理解したい人向け。手を動かしながら根気強く読める人にはオススメ。
- ・「単位が取れる解析力学ノート」橋元淳一郎: 解析力学の考え方がわかりやすく書かれているが、本講義の全範囲はカバー出来ていない。難しそうと思う人にはオススメ。
- ・「解析力学I・II」山本義隆、中村孔一: 本気で学びたい人向け。最初はやめた方が良い。
- ・「詳解力学演習」後藤 憲一、山本 邦夫他: 演習問題を解きたい場合。

これらの教科書を見てみたい場合は、佐藤に訪問・連絡(toshiki@meiji.ac.jp)で、貸し出しも可能。力学1は、「出席+中間試験+期末試験」で評価する(配点は下に記載)。中間試験では主に講義の内容に沿った出題、期末試験では講義と演習の両方に沿った内容を出题する予定である。力学1演習は、「演習問題+期末試験」で評価する(配点は下に記載)。**基本的には授業中の計算と演習問題を自分で計算できれば、中間・期末試験は解けるように出題する予定**。適宜、Oh!-Meijiの授業のお知らせも確認するように。

## 1.2 なぜ、解析力学を学ぶのか?

解析力学とは、“**力学の再定式化**”(数学的に力学を再構築したもの)である。ニュートン力学では、その運動方程式は、

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} \quad (1.1)$$

というように与えられたが、これから学ぶ解析力学では、Lagrange 方程式

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^k} = 0 \quad (k = 1, \dots, K), \quad L = T - U \quad (1.2)$$

を用いて、運動を記述していく。どうしてこのようなものを導入するかというと、より一般的な、そしてより抽象的な物理を表現する上で便利であるからだ。この解析力学の考え方は、力学だけに留まらず、電磁気学、熱力学、統計力学、量子論、相対論、場の理論など様々な場面で顔を出してくる。

この授業の担当(佐藤)の専門は宇宙物理学だが、例えば宇宙の物理現象を理解する上でも解析力学の知識が有用である。天体や人工衛星の動きを記述するケプラー運動の解析であったり、核融合反応で輝く恒星の内部の理解や、銀河や銀河団の力学的性質、ダークマターの発見にも解析力学を使った議論がベースになっている。授業では、そのような話題にも少しずつ触れながら、解析力学の面白さに触れてもらいたい。

この授業の前半は、以下のような流れで進む予定である。

第1章 ニュートン力学の復習「なぜ、Lagrange 方程式を導入する必要があるか？」

第2章 Lagrangian と Lagrange 方程式「とりあえず計算してみよう」

第3章 ダランベールの原理と Lagrange 方程式「Lagrange 方程式がどのように成り立っているか？」

第4章 Lagrange 方程式の共変性「運動方程式の形が変わらない？」

第5章 最小作用の原理「原理から Lagrange 方程式を導く」

第6章 対称性と保存則「保存則が満たされる条件は？」

第6章までの内容で、中間試験を行う予定である。成績は「出席+中間試験」50%+「期末試験」50%で評価する。「力学1演習」は、「期末試験」50%+「演習問題」50%で評価。「演習問題」では全部の問題が満点で50%という訳ではなく、加算方式で最大50%の配点とする。つまり毎回演習問題で満点を取らなくても良いが、解けなかった問題は必ず授業時間に理解するように。第6章以降には、より発展的な話や最終的には Hamilton の正準方程式の導入を扱う。この第6章までは解析力学の醍醐味で、特に「共変性」「最小作用の原理」「対称性と保存則」あたりの内容では、新しい考え方に出会うと思うので、楽しみにしてほしい。

## 1.3 ニュートン力学の復習と座標系

上で示したニュートンの運動方程式と Lagrange 方程式は、全く異なるものに見えるが、どちらも同じように運動を記述できる。この章では、Lagrange 方程式に入る前に、まずニュートン力学がどのようなものであったかを復習したい。そして、この復習の流れでニュートンの運動方程式の欠点を理解する事を目標としたい。その前に簡単に説明すると、Lagrange 方程式で扱う座標  $q^k$  というものは「一般化座標」などと呼ばれるもので、どのような座標系を選んでも良い。例えば、 $q^1 = x, q^2 = y, q^3 = z$  でも良いし、 $q^1 = r, q^2 = \theta, q^3 = \phi$  でも良いし、多体系のそれぞれの座標でも良い。一方で、最初に示したニュートンの運動方程式は「デカルト座標」を仮定した際の運動方程式で、異なる座標系に移ると形が変わってしまう。いろいろな現象を物理として理解する上で、条件によって次々と形を変えてしまうというのは、不便であり、美しくない。「どんな見方をしても運動方程式は一緒だろう」という予測と理想を、まず解析力学を学ぶ際に念頭に置いて欲しい。

### 1.3.1 ニュートン力学の復習

ニュートン力学は、以下の三つの法則から成り立つ。

**第一法則「慣性の法則」** 物体に力が働かない場合、物体は静止し続けるか、等速度運動する → 他から影響を受けない物体が静止もしくは等速直線運動するように観測される座標系(慣性系)の存在

**第二法則「運動の法則」** 加速度の大きさは、力の大きさに比例し、質量に反比例： $\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}$

**第三法則「作用・反作用の法則」** ある物体がある物体に力(作用)を及ぼすと、同じ大きさで反対向きの力(反作用)を及ぼす

まず、第一法則は何かと言うと、たくさんある中で  $i$  番目の力の働かない自由粒子の座標を  $\mathbf{r}_i$  とすれば、「慣性系」においてその運動は、

$$\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \text{const.} \equiv \mathbf{v}_{i,0} \quad (1.3)$$

で記述されることを意味する。つまり、 $t = t_0$  の時の座標を  $\mathbf{r}_i(t_0)$  とすれば、

$$\mathbf{r}_i(t) = (t - t_0)\mathbf{v}_{i,0} + \mathbf{r}_i(t_0) \quad (1.4)$$

という等速直線運動が得られる。ここで、実は力が働いていようがまいが、ある一つの粒子だけに着目して、その粒子が受ける加速度と同じ加速度のもとで運動する座標系から観測すれば、粒子の運動は同じく等速直線運動なる。一方で、複数の自由粒子が異なる加速度運動している場合は、慣性系は存在せず、第一法則も成り立たない。

第二法則は、ニュートンの運動方程式であり、

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt}m\mathbf{v} = m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F} \quad (1.5)$$

というように、運動量の時間進化は力に等しいとも書ける。ここで、右辺の「力」が左辺の運動学的性質で「定義」されるというよりは、運動学的に観測可能な左辺とそれとは独立に定義されている力である右辺とが釣り合っていると解釈したい。この「独立に定義されている力  $\mathbf{F}$ 」というのは、後の講義で出てくる保存力というものを例として考えると良い。

第三法則に関しては、例えば、ある二つの物体 1, 2 を考えて、1 に働く力  $\mathbf{F}_1$  と 2 に働く力  $\mathbf{F}_2$  とした時を考えてみる。この物体の運動量を  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$  とすれば、第三法則と第二法則を組み合わせて、

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = 0 \quad (1.6)$$

を得て、これは運動量保存 (運動量の時間微分が  $0 =$  運動量に変化しない) である。これはさらに一般化できて、

$$\sum_{i=1}^N \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i = 0 \quad (1.7)$$

となり、 $N$  個の質点からなる系でも、その全運動量は保存することが分かる。ここで、一個めのイコールが第二法則で、二個目のイコールが第三法則であることを確認してもらいたい。

### 1.3.2 保存則

力学における重要な保存則として、(i) エネルギー保存則、(ii) 運動量保存則、(iii) 角運動量保存則がある。ニュートン力学では、これらはそれぞれ、(i) 保存力、(ii) 第三法則 (上でやった作用・反作用)、(iii) 中心力から個別に導かれ、統一的に理解するのは難しい。一方で、解析力学による定式化では、これらの保存則は全て系の持つ対称性から導き出される (第 6 章)。上で説明した (ii) 以外について、簡単に触れる。

#### エネルギー保存則

力場  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  が保存力場の時、力学的エネルギー保存則が成り立っている。保存力は、解析力学でとても重要だが、例えば重力、バネの弾性力、静電気力などが保存力の例である。 $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  の場合、以下の三つのいずれかの条件が満たされている。

1. 仕事が途中経路によらない。つまり、

$$\oint_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = 0 \quad (1.8)$$

2. ポテンシャルが存在する。つまり、

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla U(\mathbf{r}) \quad (1.9)$$

3. 力場の回転がいたるところでゼロ。つまり、

$$\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r}) = 0 \quad (1.10)$$

これらは数学的に同等で、どれか一つ成り立てば他も成り立つ。さて、エネルギー保存則へ戻ると、運動方程式は、両辺に  $d\mathbf{r}/dt$  との内積を取ることによって、以下のように  $t$  で積分できる。

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} &= -\nabla U(\mathbf{r}) \\ m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= -\nabla U(\mathbf{r}) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} m \left( \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)^2 + U(\mathbf{r}) \right] &= 0 \end{aligned} \quad (1.11)$$

これより

$$E \equiv \frac{1}{2} m \left( \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)^2 + U(\mathbf{r}) = \text{const.} \quad (1.12)$$

となり、エネルギーが時間によらず一定であることが分かる。

### 角運動量保存則

角運動量  $\mathbf{L}$  は

$$\mathbf{L} \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{p} \quad (1.13)$$

のように定義される。角運動量の時間変化は、

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{L}}{dt} &= \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) \\ &= \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} \\ &= \mathbf{r} \times \mathbf{F} \equiv \mathbf{N} \end{aligned} \quad (1.14)$$

で与えられる。ここで定義した  $\mathbf{N}$  は、力のモーメントと呼ばれる。特に、力が位置ベクトルに平行 ( $\mathbf{F} \parallel \mathbf{r}$ ) である力の場合は、**中心力場**と呼ばれている。その場合には、

$$\mathbf{r} \times \mathbf{F} = 0 \Rightarrow \frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0 \quad (1.15)$$

となり、角運動量は保存する。

さて、ニュートン力学を復習したところで、ニュートン力学における運動の記述を復習していく。その前に重要なのが、運動方程式を立てる際に、どのような座標系を選ぶかである。後述するが、ニュートンの運動方程式は、座標系毎に姿を変え、面倒くさいところがある。

### 1.3.3 座標系 (1): デカルト座標

空間に固定された直行する  $x, y, z$  軸空間上の原点  $O(0, 0, 0)$  と点  $P(x, y, z)$  に対して、 $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$ 、 $|\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = r$  とする。ここで単位ベクトル (基底ベクトル) を  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$  とし、それぞれ  $x, y, z$  軸に平行である。基底ベクトルは互いに直行しているので、 $\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_x = 0$  である ( $\cdot$  は内積)。これを違う書き方をすれば、

$$\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k = \delta_{jk} = \begin{cases} 0 & (j \neq k) \\ 1 & (j = k) \end{cases} \quad (1.16)$$

となり、より一般的な表現になる。ここで、添字は  $i$  番目  $k$  番目の座標を意味しており、三次元の場合は、 $\mathbf{e}_x = \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_3$  というように考えればよい。

$\delta_{jk}$  はクロネッカーのデルタ記号と呼ばれる。点  $P$  の位置ベクトル  $\mathbf{r}$  を基底ベクトルで表現すると

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z \quad (1.17)$$

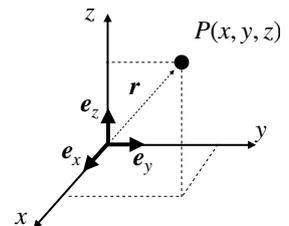


図 1.1: デカルト座標

となり、 $x, y, z$  はスカラー量である。そして、より一般には、

$$\mathbf{r} = x^1 \mathbf{e}_1 + x^2 \mathbf{e}_2 + \dots = \sum_i x^i \mathbf{e}_i$$

というように表現し、 $x^i$  が  $i$  番目の座標のスカラー量になる。今後ベクトルかスカラーかは、十分注意して進みたい。

### 1.3.4 座標系 (2): 極座標

まずは、簡単な二次元の極座標を考える。デカルト座標では、各基底ベクトル方向の距離 (スカラー量) から位置を測ったが、極座標では、距離と角度で位置を測る。点  $P$  の位置を原点からの距離  $r$  と  $x$  軸と  $OP$  のなす角  $\theta$  で  $P(r, \theta)$  と表現する。

ここで基底ベクトルを  $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta$  と定義する。この時、 $\mathbf{e}_r$  はベクトル  $\mathbf{r}$  に並行で大きさ 1。  $\mathbf{e}_r$  と  $\mathbf{e}_\theta$  は直行しているので、 $\mathbf{e}_r$  を 90 度傾けたものが  $\mathbf{e}_\theta$  である。言い換えれば、 $|\mathbf{e}_r| = |\mathbf{e}_\theta| = 1, \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_\theta = 0$  である。よって、位置ベクトル  $\mathbf{r}$  は、

$$\mathbf{r} = r \mathbf{e}_r \tag{1.18}$$

と表現できる。  $\mathbf{e}_\theta$  は  $\mathbf{e}_r$  に常に直行しているため、  $\mathbf{e}_r$  の向きが変わるにつれて方向は変化する。

デカルト座標の基底ベクトル  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$  を用いると、極座標の基底ベクトル  $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta$  は以下の様に定義できる。

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r &= \cos\theta \mathbf{e}_x + \sin\theta \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_\theta &= -\sin\theta \mathbf{e}_x + \cos\theta \mathbf{e}_y \end{aligned}$$

これは、 $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$  に回転行列を掛けたものとして理解できる。この関係を使えば、

$$\mathbf{r} = r \mathbf{e}_r = r \cos\theta \mathbf{e}_x + r \sin\theta \mathbf{e}_y \tag{1.20}$$

となることが分かるだろう。三次元極座標の場合は、更に複雑になる (自分で確認してみたい)。

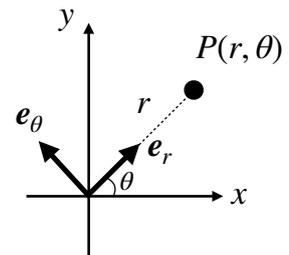


図 1.2: 二次元極座標 (1.19)

### 1.3.5 座標系 (3): 円筒座標

円筒座標では、ベクトル  $\mathbf{r}$  を  $xy$  平面に投影し、その長さを  $\rho$ 、 $x$  軸となす角を  $\phi$ 、 $z$  軸成分を  $z$  とする。点  $P$  の位置は座標  $(\rho, \phi, z)$  で表現される。このときの基底ベクトルを  $\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\phi, \mathbf{e}_z$  とする。これまでと同様に、 $|\mathbf{e}_\rho| = |\mathbf{e}_\phi| = |\mathbf{e}_z| = 1$  であり、互いに直行しているため  $\mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{e}_\phi = \mathbf{e}_\phi \cdot \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_\rho = 0$ 。

極座標の時と同じ様に、位置ベクトルを基底ベクトルで表すと

$$\mathbf{r} = \rho \mathbf{e}_\rho + z \mathbf{e}_z \tag{1.21}$$

となる。さらに、デカルト座標の基底ベクトルで表現すると、

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_\rho &= \cos\phi \mathbf{e}_x + \sin\phi \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_\phi &= -\sin\phi \mathbf{e}_x + \cos\phi \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_z &= \mathbf{e}_z \end{aligned} \tag{1.22}$$

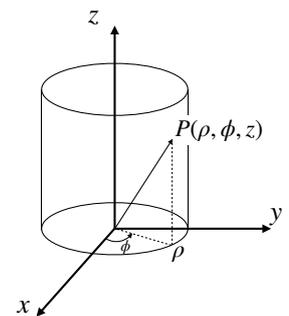


図 1.3: 円筒座標

となる。ここでは、 $\rho, \phi$  座標が  $x, y$  座標の回転で与えられている事がわかるだろう。

## 1.4 ニュートンの運動方程式は面倒くさい

さて、上の章で考えた座標系でニュートンの運動方程式がどういう形をしているかを、実際に考えてみる。ニュートンの運動方程式  $\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2}$  を眺めると、位置ベクトル  $\mathbf{r}$  の二階微分である  $\mathbf{a}$  と力の関係式である事がわかる。一方で、この位置ベクトルはデカルト座標で定義されている。そのため、他の座標系に移る場合は、上の章で行った様な変換をその都度する必要がある。この時、速度ベクトルと加速度ベクトルがどのように表されるか、各座標系で確認してみる。

### 1.4.1 デカルト座標の場合

位置座標は、最初の定義の通り、

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$$

なので、速度ベクトルを求める際は、この両辺を微分 (右辺は積の微分) して

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}} &= \dot{x}\mathbf{e}_x + x\dot{\mathbf{e}}_x + \dot{y}\mathbf{e}_y + y\dot{\mathbf{e}}_y + \dot{z}\mathbf{e}_z + z\dot{\mathbf{e}}_z \\ &= \dot{x}\mathbf{e}_x + \dot{y}\mathbf{e}_y + \dot{z}\mathbf{e}_z\end{aligned}\tag{1.23}$$

となる。ここで、 $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$  は時間変化しないので、 $\dot{\mathbf{e}}_x = \dot{\mathbf{e}}_y = \dot{\mathbf{e}}_z = 0$  である。したがって、速度の大きさは、

$$|\dot{\mathbf{r}}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\tag{1.24}$$

となる。また、加速度の場合も同様に、

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{x}\mathbf{e}_x + \ddot{y}\mathbf{e}_y + \ddot{z}\mathbf{e}_z\tag{1.25}$$

となり、やはりデカルト座標基準に作られているので、非常にシンプルである。

### 1.4.2 二次元極座標の場合

位置座標は、最初の定義の通り、

$$\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r$$

なので、その時間微分は、

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\mathbf{e}}_r\tag{1.26}$$

となる。ここで、 $\dot{\mathbf{e}}_r$  は時間変化するため 0 ではない事に注意。この時、 $\mathbf{e}_r$  の  $dt$  間の微小変化を  $d\mathbf{e}_r$  とすると、 $d\mathbf{e}_r = \mathbf{e}_r(t+dt) - \mathbf{e}_r(t) = d\theta\mathbf{e}_\theta$  なので、

$$\dot{\mathbf{e}}_r = \frac{d\mathbf{e}_r}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\mathbf{e}_\theta = \dot{\theta}\mathbf{e}_\theta\tag{1.27}$$

となる。つまり、速度ベクトルは

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\mathbf{e}}_r = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta\tag{1.28}$$

となる。ここで、速度の大きさは、

$$|\dot{\mathbf{r}}| = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2}\tag{1.29}$$

である。加速度ベクトルは、速度ベクトルの時間微分として得られるので、

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\dot{\mathbf{r}} &= \ddot{r}\mathbf{e}_r + \dot{r}\dot{\mathbf{e}}_r + \dot{r}\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + r\ddot{\theta}\mathbf{e}_\theta + r\dot{\theta}\dot{\mathbf{e}}_\theta \\ &= \ddot{r}\mathbf{e}_r + 2\dot{r}\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + r\ddot{\theta}\mathbf{e}_\theta + r\dot{\theta}\dot{\mathbf{e}}_\theta\end{aligned}\tag{1.30}$$

となる。 $\dot{\mathbf{e}}_\theta$  は、 $\dot{\mathbf{e}}_r$  の時と同様に、 $d\mathbf{e}_\theta = \mathbf{e}_\theta(t+dt) - \mathbf{e}_\theta(t) = -d\theta\mathbf{e}_r$  より、

$$\dot{\mathbf{e}}_\theta = \frac{d\mathbf{e}_\theta}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}\mathbf{e}_r = -\dot{\theta}\mathbf{e}_r\tag{1.31}$$

なので、加速度ベクトルは

$$\ddot{\mathbf{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\mathbf{e}_\theta\tag{1.32}$$

となる。

### 1.4.3 円筒座標の場合

円筒座標では、二次元極座標での変換が使いまわせる。位置ベクトルは

$$\mathbf{r} = \rho \mathbf{e}_\rho + z \mathbf{e}_z$$

だったので、これを時間微分して、二次元極座標の計算を用いると

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} &= \dot{\rho} \mathbf{e}_\rho + \rho \dot{\mathbf{e}}_\rho + \dot{z} \mathbf{e}_z \\ &= \dot{\rho} \mathbf{e}_\rho + \rho \dot{\phi} \mathbf{e}_\phi + \dot{z} \mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (1.33)$$

となり、その時間微分 (加速度ベクトル) は、

$$\ddot{\mathbf{r}} = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\phi}^2) \mathbf{e}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi}) \mathbf{e}_\phi + \ddot{z} \mathbf{e}_z \quad (1.34)$$

となる。

### 1.4.4 なぜ、面倒くさかったのか？

上の計算で分かるように、ニュートンの運動方程式では、座標変換する際に速度や加速度が次々と形を変えるため、運動方程式自体の形を変える必要があり面倒くさい。例えば、

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F_x \\ m\ddot{y} = F_y \end{cases} \quad (1.35)$$

だったものが、極座標へ移って

$$\begin{cases} m\ddot{r} = F_r \\ m\ddot{\theta} = F_\theta \end{cases} \quad (1.36)$$

とならないのは自明である。では、この面倒くさはどこから来ているのだろうか？これは、**ニュートンの運動方程式がベクトル方程式になっているから**である。特定の座標を張ってベクトルで表現すると、必ず各成分に分解する必要がある。この時、座標系が変わってしまうと、運動方程式自体も変わってしまう。一方で、共変性の章で示すが、座標系の時間推進・平行移動・直行回転・ガリレイ変換 (やそれらの合成変換) においては、ニュートンの運動方程式は共変である。

それでは、座標の張り方に依存しない物理量は何であろうか？それは、スカラー量である。Lagrange 方程式では、スカラー量である運動エネルギーとポテンシャルエネルギーに運動方程式が紐づいているため、どんな座標を張ろうとも、その座標での Lagrangian を与えてあげれば運動方程式が求まる。自然界の運動を記述する際、座標系というものを我々は便宜上定義している訳だが、そのようなものは結局は後付けであって、運動自体は変わるはずがない。そのため、**運動方程式は形を変えず一つの形で表現できるべきであり、それがまさに (Euler-)Lagrange 方程式と言える**。次章では、その Lagrange 方程式が本当に運動方程式として成り立っているのかを、実際に手を動かしながら理解していきたい。

## 第2章 Lagrangian と Lagrange 方程式

### 2.1 まず手を動かしてみよう

ニュートンの運動方程式を様々な座標系で見ると、その変換が面倒であることを前回の授業で体験した。あらかじめ宣言しておく、これからやる Lagrange 方程式には、より一般的な座標系で運動を議論できるようになるため、その面倒くさがり無くなる。その話に関しては、第4,5章で詳しく説明する。この章では、とりあえず、Lagrangian 方程式というものはどのようなものか、実際に手を動かして体験してもらいたい。

### 2.2 Lagrangian とは何か？

Lagrange 方程式は、Eq. (1.2) のような形をしており、復習すると以下のようなものである。

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^k} = 0 \quad (k = 1, \dots, K)$$

この式の中で、 $L$  が Lagrangian と呼ばれるもので、エネルギーと同じ次元を持つ。例えば、あるポテンシャル中を多数の質点が運動していることを考えよう。このとき、Lagrangian を以下のように定義する。

$$L(q^k, \dot{q}^k, t) = T - U \quad (2.1)$$

ここで、 $T$  は系全体の運動エネルギー、 $U$  はポテンシャルエネルギー、 $q^k$  ( $k = 1, 2, 3 \dots K$ ) は一般化座標である。簡単に言えば Lagrangian は、運動エネルギーからポテンシャルエネルギーを引いたもので、これを微分していけば運動方程式が得られる、という事が Eq. (1.2) から分かるだろう。この時、系全体のエネルギー  $E$  は、

$$E = T + U \quad (2.2)$$

であり、保存している (時間に依らず一定)。ポテンシャルエネルギーを引くか足すかの違いしか  $L$  と  $E$  には無いものの、あくまで別物であることに注意したい<sup>1</sup>。

一般化座標  $q_i$  とは、デカルト座標ではなくても、例えば極座標や円筒座標などの位置座標を指定する座標一般を示している。ここで、 $K$  とは系の自由度で、例えば三次元空間中を  $N$  個の質点が運動する場合、 $N$  個全ての質点の位置座標を特定するには  $3N$  個個の変換が必要になる。よって、その場合  $k = 3N$  となる。この一般化座標の導入を見ただけでも、既に Lagrange 方程式が、座標変換に対して有り難そうな雰囲気を感じるだろう。

重要な特徴として、Lagrangian は一般化座標  $q$  と一般加速度  $\dot{q}$  を“独立変数”として導入されている。一方で、普通は関数  $q$  を動かすときは、もちろん  $q, \dot{q}$  は独立ではない。架空の位置  $q$  と速度  $\dot{q}$  の対 (状態) 全体のなす空間では  $q, \dot{q}$  は独立だから  $q$  を止めながら  $\dot{q}$  を動かすことが意味をもつ。Lagrange 方程式を解く段階では、 $q, \dot{q}$  は独立に自由に選べて、解がもたまった段階で  $\dot{q}$  が  $q$  の時間微分として確定する、というイメージである。最小作用の原理の章で、より具体的なイメージが出来ると良い。

### 2.3 Lagrange 方程式を解いてみよう

Eq. (1.2) を解くと、本当に運動方程式が得られるか確かめてみよう。

<sup>1</sup>Lagrangian ( $L = T - U$ ) を Legendre 変換したものが Hamiltonian ( $H = \sum p \cdot \dot{q} - L$ ) で、これが全エネルギーに対応する事を対称性と保存則で学ぶ予定。

### 2.3.1 落下する質点

まず、一番簡単な「落下する質点」を考えてみる。 $z$ 軸を落下する質量  $m$  の質点の運動エネルギーは、 $T = \frac{1}{2}m\dot{z}^2$ 、ポテンシャルエネルギーは、 $U = mgz$  なので、

$$L = T - U = \frac{1}{2}m\dot{z}^2 - mgz \quad (2.3)$$

となる。これを使って、Lagrange 方程式の各項を計算すると、

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \right) = \frac{d}{dt} m\dot{z} = m\ddot{z} \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = -mg \quad (2.5)$$

という結果となり、これはつまり、

$$m\ddot{z} = -mg \quad (2.6)$$

となり、この計算の場合、ニュートンの運動方程式を立てる方が圧倒的に楽ではあるが、落下の運動方程式になっている。この計算のとき注意しなければいけないのが、**一般化座標  $q$  と一般加速度  $\dot{q}$  (上の計算の  $z$  と  $\dot{z}$ ) は、Lagrangian においては相互に独立であることで、 $q$  が  $\dot{q}$  の時間微分として決まっているわけではない。**

### 2.3.2 一次元調和振動子

次は、バネ定数  $k$  のバネについての質量  $m$  の質点の  $x$  軸に沿った運動について考えてみる。この時、質点の持つ運動エネルギーは  $T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$ 、ポテンシャルエネルギーは、 $U = \frac{1}{2}kx^2$  なので、

$$L = T - U = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2 \quad (2.7)$$

となる。これを使って、Lagrange 方程式の各項を計算すると、

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{d}{dt} m\dot{x} = m\ddot{x} \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -kx \quad (2.9)$$

という結果となり、

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x \quad (2.10)$$

となって、単振動の運動方程式と一致する。

### 2.3.3 単振り子

次は、長さ  $l$  の伸び縮みしない紐にくくりつけた質量  $m$  の質点の運動を考える。紐のなす角度を  $\theta$  とすると、振り子が描く弧の長さは  $l\theta$  となるので、質点の振り子運動の接線方向の速度は  $l\dot{\theta}$  となる。この時、質点の運動エネルギーは  $T = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$ 、ポテンシャルエネルギーは  $U = mg(1 - \cos\theta)$  となるので、

$$L = T - U = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mg(1 - \cos\theta) \quad (2.11)$$

となる。これを使って、Lagrange 方程式の各項を計算する。今回は、 $\theta$  と  $\dot{\theta}$  に関して運動方程式を求めようと思うので、

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = \frac{d}{dt} ml^2\dot{\theta} = ml^2\ddot{\theta} \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgl\sin\theta \quad (2.13)$$

という結果となり、

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin\theta \quad (2.14)$$

が得られる。これも力学で学ぶ単振り子の運動方程式と一致する。

### 2.3.4 両端をばねでつながれた2つの質点 (連成振動)

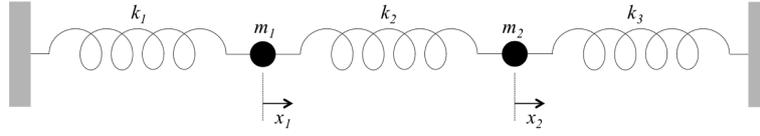


図 2.1: 両端をばねでつながれた2つの質点による連成振動。

図 2.1 のような両端をばねでつながれた2つの質点による連成振動を考える。まず、2つの質点の運動エネルギーをそれぞれ求める。質量  $m_1, m_2$  の運動エネルギー  $T_1, T_2$  はそれぞれの質点の変異  $x_1, x_2$  を用いて、

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 \\ T_2 &= \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 \end{aligned} \quad (2.15)$$

と求められる。次にポテンシャル・エネルギーを求めるのだが、ばねが3つもあり複雑なので少し丁寧に求める。それぞれの質点に加わる力を考える、質量  $m_1$  の質点は変異  $x_1$  によって、左のばねから  $-k_1 x_1$  の力、中央のばねから  $-k_2(x_1 - x_2)$  の力を受ける。よって、質量  $m_1$  が受ける力  $F_1$  は

$$F_1 = -k_1 x_1 - k_2(x_1 - x_2) \quad (2.16)$$

である。この時、変異の向きとばねから受ける力の向きの関係と、中央のばねの変異に注意する。次に、質量  $m_2$  のばねが受ける力  $F_2$  は同様にして

$$F_2 = -k_2(x_2 - x_1) - k_3 x_2 \quad (2.17)$$

よって、力とポテンシャルエネルギーの関係を使って、ポテンシャル・エネルギー  $U_1, U_2$  は

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{1}{2} k_1 x_1^2 + \frac{1}{2} k_2 (x_1 - x_2)^2 \\ U_2 &= \frac{1}{2} k_2 (x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2} k_3 x_2^2 \end{aligned} \quad (2.18)$$

となる。質量  $m_1, m_2$  の質点のラグランジアンをそれぞれ、 $L_1, L_2$  とすると、

$$\begin{aligned} L_1 &= T_1 - U_1 = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 - \frac{1}{2} k_1 x_1^2 - \frac{1}{2} k_2 (x_1 - x_2)^2 \\ L_2 &= T_2 - U_2 = \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 - \frac{1}{2} k_2 (x_2 - x_1)^2 - \frac{1}{2} k_3 x_2^2 \end{aligned} \quad (2.19)$$

と求めることができる。つぎにそれぞれの Lagrangian を Lagrange 方程式に入れてあげると、

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= -k_1 x_1 - k_2(x_1 - x_2) = -(k_1 + k_2)x_1 + k_2 x_2 \\ m_2 \ddot{x}_2 &= -k_2(x_2 - x_1) - k_3 x_2 = -(k_2 + k_3)x_2 + k_2 x_1 \end{aligned} \quad (2.20)$$

という運動方程式が得られる (この運動方程式は、個人的に解いておくと良い)。

### 2.3.5 静電磁場下の電荷の運動

今度は、力学を離れて電磁気でも Lagrangian が有効であることを確認したい。静電場  $\mathbf{E}$ 、静磁場  $\mathbf{B}$  の下での運動方程式は、

$$m\ddot{\mathbf{r}} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (2.21)$$

であった。これを導いてみたいが、どのような Lagrangian が必要になるだろうか？この場合、下記のスカラーポテンシャル  $\phi(\mathbf{r})$  とベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  を導入すると便利である。

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (2.22)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (2.23)$$

荷電粒子の運動エネルギーは  $T = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2$  で、導入は省く(電磁気学の授業参照)がポテンシャルエネルギーは  $U = q(\phi - \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A})$  となるので、

$$L = T - U = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 - q(\phi - \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}) \quad (2.24)$$

という Lagrangian が得られる。これまでと同様に分解して計算していく。まず Lagrange 方程式の一項目は

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \right) = \frac{d}{dt} (m\dot{\mathbf{r}} + q\mathbf{A}) \quad (2.25)$$

となるが、ここで偏微分の合成関数の微分から、

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \left( \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \nabla \right) \mathbf{A} \quad (2.26)$$

となるので、

$$\frac{d}{dt} (m\dot{\mathbf{r}} + q\mathbf{A}) = m\ddot{\mathbf{r}} + q \left[ \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \left( \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \nabla \right) \mathbf{A} \right] \quad (2.27)$$

が得られる。また、Lagrange 方程式の二項目は

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -q \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{r}} + q \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}) = -q \nabla \phi + q [(\dot{\mathbf{r}} \cdot \nabla) \mathbf{A} + \dot{\mathbf{r}} \times (\nabla \times \mathbf{A})] \quad (2.28)$$

となる。ここでは、ベクトル場同士の内積の勾配 ( $\text{grad} = \nabla = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}$ ) の計算結果である

$$\nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b} + (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{a} + \mathbf{a} \times (\nabla \times \mathbf{b}) + \mathbf{b} \times (\nabla \times \mathbf{a}) \quad (2.29)$$

を使っており、上記の計算では  $\dot{\mathbf{r}}$  に rot と grad が掛かる二つの項が消え、Eq. (2.28) となっている。計算した Lagrange 方程式の各項をまとめると、

$$m\ddot{\mathbf{r}} + q \left[ \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \left( \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \nabla \right) \mathbf{A} \right] + q \nabla \phi - q [(\dot{\mathbf{r}} \cdot \nabla) \mathbf{A} + \dot{\mathbf{r}} \times (\nabla \times \mathbf{A})] = 0 \quad (2.30)$$

これを式変形すると、

$$\begin{aligned} m\ddot{\mathbf{r}} &= q \left[ -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \left( \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \nabla \right) \mathbf{A} - \nabla \phi + \left( \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \nabla \right) \mathbf{A} + \dot{\mathbf{r}} \times (\nabla \times \mathbf{A}) \right] \\ &= q \left[ -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \dot{\mathbf{r}} \times (\nabla \times \mathbf{A}) \right] \\ &= q(\mathbf{E} + \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}) \end{aligned} \quad (2.31)$$

となり、最初の運動方程式が導けることが確認できた。

## 2.4 結局、Lagrangian とは何か？

Lagrangian は、運動エネルギーからポテンシャルエネルギーを引いたものという話をしたが、結局 Lagrangian というものは何なのかを理解するのは難しい。エネルギーと同じ次元を持つことは分かるが、物理的に何を意味しているかは分かり難いだろう。特に、「なぜポテンシャル引くのか？」というのは答えるのは難しい疑問だが、シンプルな例をあげて考えてみたいと思う。

図 2.2 のような斜方投射を考える。この系では、全エネルギー  $E = T + U$  は保存されているが、運動エネルギー  $T$  とポテンシャル(位置)エネルギー  $U$  は時間と共に変化している。例えば、図に示すようにある時刻  $t_1, t_2$  の運動エネルギーを  $T_1, T_2$  とすれば、速度関係は  $v_1 > v_2$  なので、 $T_1 > T_2$  である。この時、

$$T_1 - T_2 = \delta T \quad (2.32)$$

として、微小な変化であるとする。一方、全エネルギーは保存されているので、 $\delta T$  だけ増加した場合(今は減少)、逆にポテンシャルエネルギーは  $\delta U$  減少(今は増加)するはずだ。 $T_1 - T_2 = \delta T$  の時は、 $U_1 - U_2 = -\delta U$  となり、これらの関係は、

$$\delta T - \delta U = 0 \quad (2.33)$$

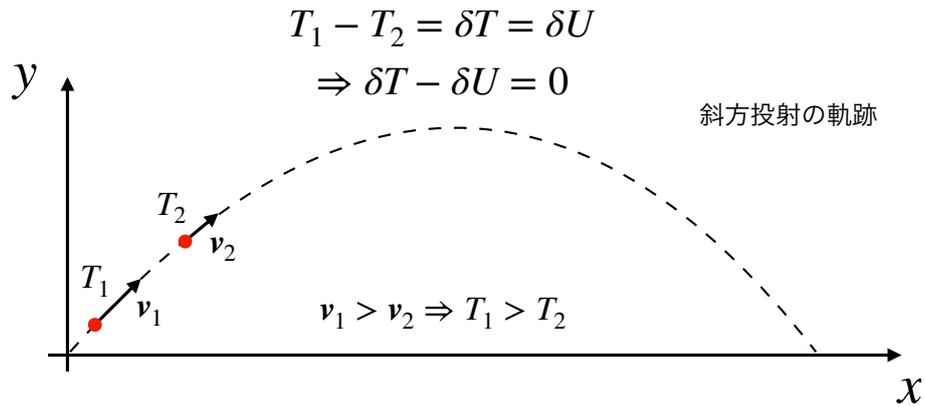


図 2.2: 斜方投射の軌跡。全エネルギーが保存される場合、運動エネルギーが減れば (増えれば)、位置 (ポテンシャル) エネルギーが増える (減る)。これらの関係性を保たれるように  $L = T - U$  が設定されていると考えられる。

というように変化分を打ち消す必要があり、Lagrangian の姿がここに見える。これは、積分しても 0 なので、

$$\int \delta(T - U) dt = 0 \Rightarrow \int \delta L dt = 0 \quad (2.34)$$

となる。実は、この式は第 4 章に出てくる作用の (第一) 変分  $\delta S$  と呼ばれるもので、

$$\delta S = \int \delta L dt = 0 \quad (2.35)$$

を満たすことで作用が最小 (停留) になるところを探し、それが運動方程式になっている。結論として、エネルギー保存則を保つためには、運動エネルギーの変化分をポテンシャルエネルギーの変化分で打ち消す様に軌道が決定されており、Lagrangian がそれを表現している ( $T - U$  の形をとっている) と解釈できる。

## 第3章 ダランベールの原理と Lagrange 方程式

前章では、Lagrangian がどんなものであるか、そして Lagrange 方程式を実際に解くことで、実際に運動方程式が導かれることを確認した。この章では、Lagrange 方程式がどのように成り立っているのかについて調べていく。

### 3.1 ニュートンの法則から Lagrange 方程式を導こう

デカルト座標で書かれたニュートンの法則から出発して、Lagrange 方程式を導いてみよう。簡単に言えば、「運動エネルギーとポテンシャルエネルギーにどんな操作をすれば運動方程式が得られますか？そして、それは Lagrange 方程式になっていますか？」という問いであり、確かめ算みたいなものと考えて良い。まず、 $N$  個の質点を持った系の全運動エネルギー  $T$  を以下のように定義する。

$$T \equiv \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} m_k |\dot{\mathbf{r}}_k|^2 \quad (3.1)$$

ここで、 $i$  番目の粒子に働く力  $\mathbf{F}_i$  がポテンシャルエネルギー  $U$  の微分:

$$\mathbf{F}_i = - \frac{\partial U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_{N-1}, \mathbf{r}_N)}{\partial \mathbf{r}_i} \quad (3.2)$$

で与えられる場合を考え、これは保存力と呼ばれる。解析力学では、保存力がよく用いられる。例えば、重力やバネの弾性力、静電気力などが保存力の例であり、座標  $\mathbf{r}_i$  での勾配 (gradient) が  $i$  番目の粒子に働く力として与えられる。前の章で計算した、質点の落下、振動などは、この保存力下の運動を記述したことになる。位置ベクトル  $\mathbf{r}$  の一つの質点の場合は、単に、

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla U(\mathbf{r}) \quad (3.3)$$

とも表現できる。ここで、 $\nabla$  はナブラであり、 $n$  次元空間の  $j$  番目の方向の単位ベクトル  $\mathbf{e}_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) を用いて  $\mathbf{r} = x^j \mathbf{e}_j$  と書くとき、

$$\nabla = \mathbf{e}_j \frac{\partial}{\partial x^j} \quad (3.4)$$

と表される。これと同じ意味で、

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \quad (3.5)$$

とも書く。

この場合、運動量は、

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{p}_k}{dt} &= m_k \ddot{\mathbf{r}}_k \\ &= \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \left( \frac{1}{2} m_k |\dot{\mathbf{r}}_k|^2 \right) \\ &= \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \left( \sum_{j=1}^N \frac{1}{2} m_j |\dot{\mathbf{r}}_j|^2 \right) \\ &= \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{r}}_k} \end{aligned} \quad (3.6)$$

と変換すれば、ニュートンの運動方程式を

$$\frac{d\mathbf{p}_k}{dt} = \mathbf{F}_k = - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_k} \rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{r}}_k} \right) + \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_k} = 0 \quad (3.7)$$

と書き直すことができる。ここで、運動エネルギー  $T$  とポテンシャルエネルギー  $U$  を用いて、

$$L \equiv T - U \quad (3.8)$$

と定義すれば、

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_k} = 0 \quad (3.9)$$

と書き直せ、確かに Lagrange 方程式の形になることが確かめられた。しかし、これだけではニュートンの運動方程式をただ書き換えたのみであり、Lagrange 方程式の有り難みは感じられない。**粒子の座標をデカルト座標から一般化して初めてその真価が明らかになる。**

## 3.2 仮想仕事の原理とダランベールの原理

デカルト座標を用いて書かれた運動方程式:

$$m_i \frac{d^2 x^i}{dt^2} = F^i \quad (i = 1, \dots, 3N) \quad (3.10)$$

から出発し、**ホロノーム系に対する Lagrange 方程式を一般化座標を用いて書き下す**ことが次の目標である。その前に準備として、拘束条件、仮想仕事の原理、ダランベールの原理を導入していく。

### 3.2.1 拘束条件と一般化座標

ホロノーム系というものが何かを説明する。 $N$  個の質点系を考えた場合、それらの座標  $\mathbf{r}_i$  は必ずしも互いに独立とは限らない。例えば、特定の二つの質点間の距離が一定である場合には、

$$|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| = a_{12} (= \text{const}) \quad (3.11)$$

という条件が付加され、系の自由度は一つ減る。このように系の独立な自由度を減らす条件を拘束条件あるいは束縛条件と呼ぶ。

質点のデカルト座標  $\{\mathbf{r}_k\} (k = 1, \dots, N)$  をまとめて  $x^i (i = 1, \dots, 3N)$  と書くこととする。より一般に、 $3N$  個の関数  $f^i$  を用いて

$$x^i = f^i(q^1, q^2, \dots, q^K, t) \quad (i = 1, \dots, 3N) \quad (3.12)$$

という関係式で結び付けられる「独立な」パラメータ  $\{q^k\} (k = 1, \dots, K)$  が存在すれば、それらもまた考えている力学系を同等に記述できる。これは第 2 章でも導入した一般化座標である。**この一般化座標でも Lagrange 方程式が満たされている事を確認していく。**

ホロノーム系とは、一般化座標に対する拘束条件が

$$h_r(q^1, q^2, \dots, q^{3N}, t) = 0 \quad (r = 1, \dots, R) \quad (3.13)$$

のように場合を指す。例えば、 $xy$  平面上で半径  $a$  の円を描くような運動の場合、拘束条件は  $x^2 + y^2 - a^2 = 0$  になる、と言うような物と考えて良い。これ以外の拘束条件を、非ホロノーム系という。

### 3.2.2 仮想仕事の原理

静的つり合いにある力学系では、全ての質点に働く力が  $F^i = 0 (i = 1, \dots, 3N)$  を満たす。この式は、独立な  $3N$  個の変位  $\{\delta x^i\}$  を導入すれば

$$\delta W = \sum_{i=1}^{3N} F^i \delta x^i = 0 \quad (3.14)$$

と書き直せる。ここで導入した  $\{\delta x^i\}$  は、 $i$  番目の座標が運動方程式に従って時間発展したときの変位という意味ではなく、あくまで全く任意に選んだ仮想的な変位である(静力学で力は釣り合っているのに、そもそも時間発展しない)。この式を「**仮想仕事の原理**」と呼ぶ。0 は何と積を取っても 0 なので、当然の結果である。これの意味するところは、「**仮想変位のする仕事をすべて足してゼロならば外力はつり合っている**」ということである。

### 3.2.3 ダランベールの原理

さて、今度は静的つり合いではなく動力学を考える。この場合、

$$\sum_{i=1}^{3N} \left( F^i - m_i \frac{d^2 x^i}{dt^2} \right) \delta x^i = 0 \quad (3.15)$$

とすれば良い。このように、運動の問題を力のつり合い(平衡)の問題に帰着させることを、**ダランベールの原理**という。作用する外力  $F_i$  に対し、 $-m \frac{d^2 x^i}{dt^2}$  なる力(慣性抵抗)がかかって全体が力のつり合った(平衡した)状態であるとみなすことができる(前に加速している時、後ろに引っ張られる様なイメージ)。パッと見は、運動方程式を単に書き換えた様に見えないが、各  $\delta x^i$  が独立でない場合(拘束条件がある場合)、便利な変形になってくる。

拘束条件を考える場合には、次の二点が問題になる。

(i)  $3N$  個の座標  $x^i$  が独立でないため、(3.10) すべてが互いに独立ではなくなる。つまり、すべての仮想的変位  $\delta x^i$  も完全に独立に選べなくなる。

(ii) (3.10) の右辺に、本来の力  $F^{(a)i}$  以外の力  $F^{(c)i}$  が現れる:

$$F^i = F^{(a)i} + F^{(c)i} \quad (3.16)$$

この  $F^{(c)i}$  は拘束条件を満たすために必要となる力であり、拘束力と呼ばれる。例えば、斜面上を運動する物体への抗力やひもに付いた物体への張力などが拘束力の例である。

拘束力も考えるつり合いの式は、

$$\sum_{i=1}^{3N} \left( F^{(a)i} - m_i \frac{d^2 x^i}{dt^2} \right) \delta x^i + \sum_{i=1}^{3N} F^{(c)i} \delta x^i = 0 \quad (3.17)$$

と書け、ここで第二項は拘束力による仮想的な仕事を表す。この拘束力による仮想仕事が 0 の場合は、

$$\sum_{i=1}^{3N} \left( F^{(a)i} - m_i \frac{d^2 x^i}{dt^2} \right) \delta x^i = 0 \quad (3.18)$$

となり、滑らかな拘束という。剛体の場合、拘束力は内力に対応するが、作用反作用の法則で仕事は 0 なので、滑らかな拘束であり、摩擦のない面上を運動する質点は、拘束力と変位は直行するので、こちらも滑らかな拘束である。

### 3.2.4 ホロノーム系に対する Lagrange 方程式

ホロノーム系の場合、前節の (i) のために (3.18) 式の  $\delta x^i$  の前の係数を全て 0 と置くことができない。 $\delta x^i$  が独立ではないからである。一方、より少数の自由度  $K (< 3N)$  からなる互いに独立な一般座標  $q^k$  を用いれば、

$$x^i = x^i(q) \Rightarrow \delta x^i = \sum_{k=1}^K \frac{\partial x^i}{\partial q^k} \delta q^k \quad (3.19)$$

と書けるはずである(合成関数の微分)。これを用いて、(3.18) を  $q^k$  に対する独立な  $K$  個の式に書き直してみる。まず、(3.18) 式より、

$$\sum_{k=1}^K \left[ \sum_{i=1}^{3N} \left( F^{(a)i} - m_i \frac{d^2 x^i}{dt^2} \right) \frac{\partial x^i}{\partial q^k} \delta q^k = 0 \right] \quad (3.20)$$

となる。ここで、括弧内の第一項は、保存力の場合  $U(q) \equiv U(x(q))$  と書くことにして、

$$\sum_{i=1}^{3N} F^{(a)i} \frac{\partial x^i}{\partial q^k} \delta q^k = - \sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial U}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial q^k} \delta q^k = - \frac{\partial U}{\partial q^k} \delta q^k \quad (3.21)$$

が得られる。ここで、(3.19) 式より、

$$\dot{x}^i \equiv \frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial x^i}{\partial t} + \sum_{k=1}^K \frac{\partial x^i}{\partial q^k} \dot{q}^k \quad (3.22)$$

なので (メモ参照)、(3.23) 式を  $\dot{q}^k$  で偏微分すると、

$$\frac{\partial \dot{x}^i}{\partial \dot{q}^k} = \frac{\partial x^i}{\partial q^k} \quad (3.23)$$

となるので、これを用いると、

$$\begin{aligned} \ddot{x}^i \frac{\partial x^i}{\partial q^k} &= \frac{d}{dt} \left( \dot{x} \frac{\partial x^i}{\partial q^k} \right) - \dot{x} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x^i}{\partial q^k} \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left( \dot{x} \frac{\partial x^i}{\partial q^k} \right) - \dot{x} \frac{\partial \dot{x}^i}{\partial q^k} \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \frac{\partial |\dot{x}^i|^2}{\partial \dot{q}^k} - \frac{1}{2} \frac{\partial |\dot{x}^i|^2}{\partial q^k} \end{aligned} \quad (3.24)$$

が得られる。この (3.24) と (3.21) より、

$$\sum_{k=1}^K \left[ -\frac{\partial U}{\partial q^k} - \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial}{\partial q^k} \right) \sum_{i=1}^{3N} \frac{m_i |\dot{x}^i|^2}{2} \right] \delta q^k = 0 \quad (3.25)$$

となる。したがって、一般座標における系の Lagrangian を

$$L = L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - U(q) = \sum_{i=1}^{3N} \frac{m_i}{2} \left| \frac{dx^i(q)}{dt} \right|^2 - U(q) \quad (3.26)$$

と定義すれば、

$$\sum_{k=1}^K \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial q^k} \right) \delta q^k = 0 \quad (3.27)$$

に帰着する。ここで、 $\delta q^k$  は互いに独立な仮想変異であるので、その前の係数は全て独立に 0 と置けるため、

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}^k} \right) - \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial q^k} = 0, \quad (k = 1, \dots, K) \quad (3.28)$$

が導かれる。よって、(Euler-)Lagrange 方程式が導けた。

### 3.3 簡単なまとめ

今回の計算で分かるのは、**ニュートンの運動方程式というものは、Lagrangian と呼ばれる何かエネルギーの次元を持った関数にある操作をしていくと得られる**、という事だと思う。Lagrangian というものが運動方程式の上流側にあって、運動を決定する上で重要なことが分かると思うが、「ある操作 (Lagrange 方程式の所)」とは一体何を意味しているだろうか？ 今回の単なる「ニュートン方程式の書き換え」から出てきたこの操作が、実はある原理から導かれる、という事を以降の章で学んでいく。

## 第4章 最短経路問題と変分法

第3章では、ニュートンの運動方程式をダランベールの原理に変形し、それを一般座標を用いて書き換えることで Lagrange 方程式を導いた。一方で、これは単なるニュートンの運動方程式を書き換えにしか見えない。なぜ、Lagrange 方程式の形から運動方程式が導かれるのだろうか？「Lagrange 方程式はどこから来るのか？」という、より上流にある疑問に迫って行きたい。その際、一見無関係に見える「二点間の最短経路を求める問題」が関わって来るため、まずこの問題から考えてみる。

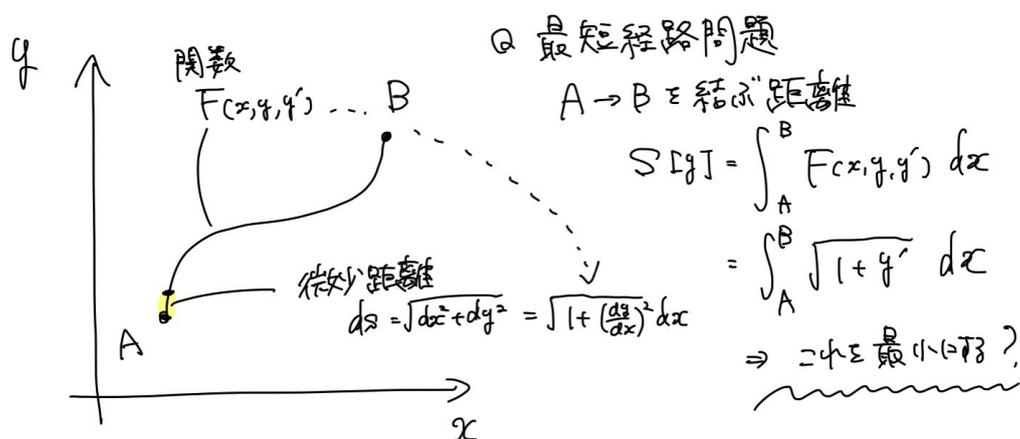


図 4.1: 最短経路を求める問題。

### 4.1 最短経路問題

図 4.1 に最短距離問題の概略図を示した。この問題では、 $xy$  平面上の二点  $A, B$  の間を通る経路を最短にする関数  $F(x, y, y')$  を探す。図にある通り、 $AB$  間の微小距離は、

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \sqrt{1 + y'^2} dx \quad (4.1)$$

なので、これを経路に沿って積分した値

$$S[y] = \int_A^B F(x, y, y') dx = \int_A^B \sqrt{1 + y'^2} dx \quad (4.2)$$

が最小になる関数  $F(x, y, y')$  を探せば良い。この時、 $S$  は関数を与えると数値が得られる「汎関数」と呼ばれるもので、関数の関数である。上記の汎関数では、関数  $y(x)$  を入れるとある数値 (この場合、 $AB$  間の距離) が得られる。では、この汎関数  $S$  (つまり、 $AB$  間の距離) が最小になる関数を求める問題は何かというと、極値問題になる。ある関数の極値を求めるためには、関数の微分が 0 になる所を探せばよかったが、汎関数の場合はどうなるだろうか？

### 4.2 微分と変分

関数  $f(x)$  の極値を探す時には、

$$\frac{df(x_0)}{dx} = f'(x_0) = 0 \quad (4.3)$$

となる点  $x_0$  を探せば良かった。これは、 $f(x)$  が  $x_0$  で極値 (停留値) をとる時、微小な  $\delta x$  を足しても、

$$f(x_0 + \delta x) = f(x_0) + \frac{df(x_0)}{dx} \delta x + O(\delta x^2) \quad (4.4)$$

となり、 $\delta x$  の一次の範囲で変化しないためである。

同じように汎関数の極値を求めるには、

$$\delta S = 0 \quad (4.5)$$

という (第一) 変分  $\delta S$  を 0 にするような関数を探す。どのように考えるかという、基本的には関数の時と同じように、汎関数  $S$  を最小にする  $F$  を少し変えても、 $S$  の値は変わらないはずなので、

$$S[y + \delta y] - S[y] = \delta S = \int_A^B F(x, y + \delta y, y' + \delta y') dx - \int_A^B F(x, y, y') dx \quad (4.6)$$

を考えて、これが 0 となる  $F$  を探せば良い。この時、例えば、 $y = x$  みたいな関数だとしたら、それに対して  $y = x + \epsilon x^3$  のように、微小な“関数”を足してよくて、関数  $F$  は  $y + \delta y$  という微小変化でグニャグニャ形を変えられるものと考えて良い (図 4.2)。

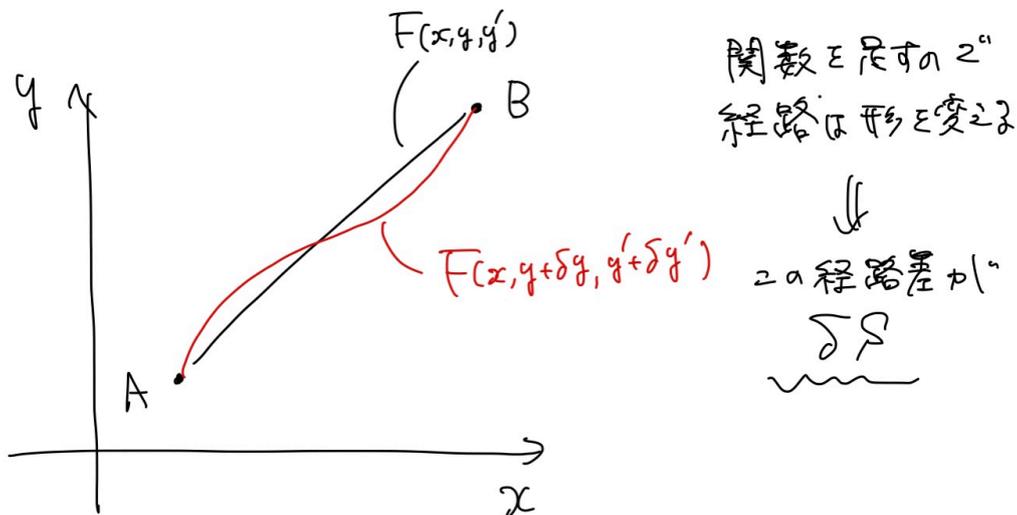


図 4.2:  $F(x, y, y')$  と  $F(x, y + \delta y, y' + \delta y')$  の経路の違いのイメージ。

また、図 4.2 を眺めながら考えてみると、 $y + \delta y$  という微小変化が無限パターンある時、ある点  $x$  で  $y = y + \delta y$  になったり、 $y' = y' + \delta y'$  になったり、またその逆などいろんなパターンがあることが想像できるだろう。これはつまり、 $y$  を止めながら  $y'$  を変えたり、その逆の操作をしている事を意味しており、 $y, y'$  を独立の変数として扱っている状況になっている (Lagrange 方程式でも似たような話があった事を思い出そう)。

### 4.3 Euler 方程式

それでは、変分  $\delta S$  を 0 にするような関数を実際に探していく。まず、 $\delta S$  の被積分関数の差は、微分量の一次までで

$$F(x, y + \delta y, y' + \delta y') - F(x, y, y') = \frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y'} \delta y' \quad (4.7)$$

となるから、

$$\delta S = \int_A^B \left[ \frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y'} \delta y' \right] dx \quad (4.8)$$

が 0 となる関数を求めれば良い。ここで、 $\delta y' = \frac{d}{dx} \delta y$  となるので、括弧内の二項目を部分積分することで、

$$\delta S = \int_A^B dx \left[ \frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y'} \right] \delta y + \left[ \frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y'} \delta y \right]_B^A \quad (4.9)$$

となり、最後の項は、両端を固定しているという条件より ( $\delta y(A) = \delta y(B) = 0$ )、消える。そして、変分  $\delta y$  が任意であったことから、上の式が0になるためには

$$\frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y'} = 0 \quad (4.10)$$

を満たす必要がある。この式を **Euler 方程式** と呼ぶ (Lagrange 方程式と同じ形!)。今考えている最短経路問題では、 $F = \sqrt{1 + y'^2}$  だったので、

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \quad (4.11)$$

となるので、Euler 方程式は、

$$\frac{d}{dx} \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = 0 \Rightarrow \frac{dy'}{dx} = 0 \quad (4.12)$$

となるため、 $y'' = 0$  を積分していけばよい。積分定数を  $a, b$  とすれば、

$$y = ax + b \quad (4.13)$$

という解が得られ、AB 間を最短で結ぶ経路は直線であることが分かる。

## 4.4 Euler 方程式と Lagrange 方程式

今回、運動方程式とは一見無関係に見える「最短経路問題」に取り組んでみた結果、Lagrange 方程式と瓜二つの Euler 方程式が得られた。実は、この後やる「最小作用の原理」による Lagrange 方程式の導出では、ほぼ同じ計算を行う事になる (図 4.3)。最短経路問題では (位置-位置) 空間での経路を最短にしたが、最小作用の原理 (運動方程式の導出) では (位置-時間) 空間での経路を最短にする。つまり、物質の運動は、幾何学的にも時間的にも最短になるように選ばれている、ということである。

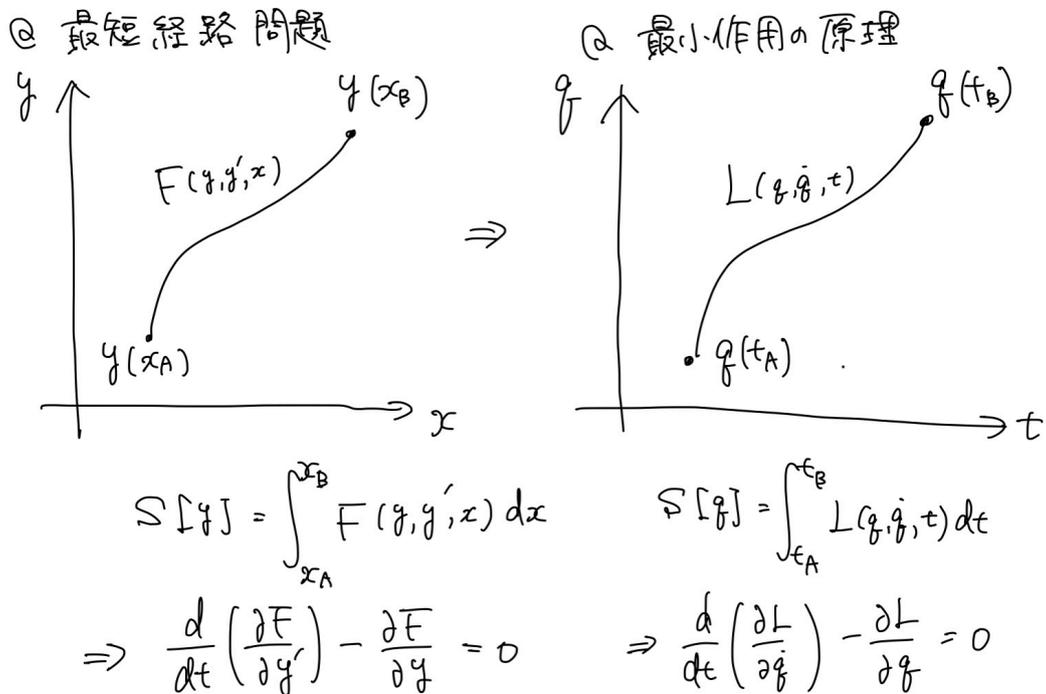


図 4.3: 今回やった最小経路問題とこれからやる最小作用の原理の比較。

## 第5章 最小(停留)作用の原理

第4章では、最短経路問題から Euler 方程式が導出されることを確認し、これが Lagrange 方程式と全く同じ形である事を学んだ。そして、運動方程式の導出も「最短経路問題」であり、この章では「最小(停留)作用の原理」からの Lagrange 方程式の導出を行う。

### 5.1 最小作用の原理 (ハミルトンの原理)

物理系は、Lagrangian と呼ばれる、座標とその時間微分 (および時間) の関数  $L = L(q, \dot{q}, t)$  で特徴付けられる。その系が、時刻  $t = t_1$  に  $q^{(1)} = q(t_1)$ 、時刻  $t = t_2$  に  $q^{(2)} = q(t_2)$  の位置にあるものとする。時刻  $t(t_1 < t < t_2)$  においてこの系は、作用 (action) と呼ばれる次の積分:

$$S[q] = \int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot{q}(t), t) dt \quad (5.1)$$

が最小値を取るような経路  $q = q(t)$  を運動する。これが、最小作用の原理と呼ばれる。ここで、作用  $S[q]$  は時間の関数  $q(t)$  が描く経路を与えると数を返す関数、すなわち“関数の関数”であり、汎関数 (functional) と呼ばれる。

### 5.2 Euler-Lagrange 方程式の導出

$q(t)$  が最小作用の原理を満たす時間  $t$  の関数として、どのように (Euler-)Lagrange 方程式が得られるかを考えてみる。まず、 $q(t)$  から任意微小関数  $\delta q(t)$

$$q(t) + \delta q(t) \quad (5.2)$$

を考え、それに対応する作用を  $S + \delta S$  とする。この  $\delta S$  を  $q$  に関する変分と呼ぶ。境界条件より、時刻  $t_1, t_2$  における  $q^{(1)}, q^{(2)}$  は与えられているので、それらの点での微小関数  $\delta q(t)$  は、

$$\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0 \quad (5.3)$$

である。 $\delta q(t)$  経路がずれた時の  $S$  の変化量  $\delta S$  は、

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} [L(q(t) + \delta q(t), \dot{q}(t) + \delta \dot{q}(t), t) - L(q(t), \dot{q}(t), t)] dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta L dt \quad (5.4)$$

$L$  は、 $q$  と  $\dot{q}$  の関数なので、全微分の関係より

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \quad (5.5)$$

である。ここでは、簡単のため  $q(t)$  を  $q$  と略している。これを上式に代入して、

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) dt \quad (5.6)$$

となる。ここで、第二項を部分積分すると、

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial q} \delta q dt + \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q dt \\ &= \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q dt \end{aligned} \quad (5.7)$$

が得られる。(5.3)の境界条件より、この式の第一項は0になるので、 $\delta S = 0$ になるためには、第二項の被積分関数が0でなくてはならない。したがって、最小作用の原理は

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt = 0 \iff \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0 \quad (5.8)$$

という関係を通じて、(Euler-)Lagrange 方程式に帰着する。

### 5.2.1 作用の例: 電磁場の作用

具体的な計算は割愛するが、力学以外でどのような作用  $S$  が導入されて、そこから何が得られるかを例としてあげる。まず、電磁場の作用は、

$$S = -\frac{1}{4\mu_0} \int F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} d^4x \quad (5.9)$$

というように与えられる。ここで、 $F_{\mu\nu}$  は電磁場テンソルと呼ばれ、

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{E_x}{c} & -\frac{E_y}{c} & -\frac{E_z}{c} \\ \frac{E_x}{c} & 0 & B_z & -B_y \\ \frac{E_y}{c} & -B_z & 0 & B_x \\ \frac{E_z}{c} & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (5.10)$$

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{E_x}{c} & \frac{E_y}{c} & \frac{E_z}{c} \\ -\frac{E_x}{c} & 0 & B_z & -B_y \\ -\frac{E_y}{c} & -B_z & 0 & B_x \\ -\frac{E_z}{c} & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (5.11)$$

というものである。

この作用を最小にする時、

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{B} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0 \quad (5.12)$$

の真空中のマクスウェル方程式の一部が得られる。

### 5.2.2 作用の例: 重力場の作用

さらに難しい話で、一般相対性理論でも、この作用は活躍する。重力場の作用は、

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int R \sqrt{-g} d^4x + S_m \quad (5.13)$$

というように与えられ、最初の項がアインシュタイン-ヒルベルト作用と呼ばれ ( $R$  は Ricci scalar)、 $S_m$  は物質場を記述する項である。この作用を最小にする時、

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (5.14)$$

が得られ、これが有名なアインシュタイン方程式である。この方程式では、左辺が空間の歪みを、右辺では物質の分布を表している。アインシュタイン方程式を解くのは非常に難しいが、例えば、重力源となる質量分布が時間的に変化せず、また運動もしておらず、球対称である場合を考えてみたらどうだろう？ここまで限定すれば何とかなり、そのようにして解かれた解が「シュバルツシルト解」である。これは、理論的なブラックホールの予言であり、

$$r_g = \frac{2GM}{c^2} \quad (5.15)$$

がシュバルツシルト半径と呼ばれる。この半径より内側の物質は、光でさえも抜け出せないことを予言している。他にも、現在宇宙は膨張していることが分かっているが、その宇宙の膨張進化に関しても、このアインシュタイン方程式から議論できる。

これらの例を見た中で強調したいのは、様々な物理の分野で「作用  $S$ 」というものは定義できて、この作用を最小にすることで、基本的な方程式が導かれるということである。

# 第6章 Lagrange 方程式の共変性

## 6.1 ニュートンの運動方程式は面倒くさかった

おそらく「共変性」とはなんだろうと思うだろう。簡単に言えば、「共変」であると言うことは、何か操作したときに「形を変えない」という事である。第1章でみたような、運動方程式の座標変換の面倒くささがこの共変性に関わっており、要は「形を変える必要があった」から面倒だったわけだ。

## 6.2 ニュートンの運動方程式の共変性

物体の運動を考える時、人が採用する座標系のとり方(選び方)に運動は左右されるだろうか？もちろん、世界はそんなに複雑に出来ていないはずで、ベクトルやテンソルを用いれば、座標系に依らない運動の記述ができるはずである。ここでは、ニュートンの運動方程式にどのような共変性があるかを見ていきたい。座標系を変換する際には、面倒なニュートンの運動方程式であったが、少なくとも同じ座標系内での変換では形を変えて欲しくない。例えば、異なる人がある物体の運動を記述する場合、異なる原点を設定したり、違う角度から見たりするだろう。そういった場合にも、運動方程式が形を変えてしまうと非常に困る。

$n$ 次元のデカルト座標系において、位置ベクトル  $\mathbf{r}$  または  $\mathbf{x}$  は、成分で書くと

$$\mathbf{r} = \mathbf{x} = (x^1, x^2, \dots, x^n) \tag{6.1}$$

であり<sup>1</sup>、または

$$\mathbf{r} = \mathbf{x} = \sum_{j=1}^n x^j \mathbf{e}_j \tag{6.2}$$

のように  $n$  個の正規直行基底ベクトル  $\mathbf{e}_j$  ( $j = 1, \dots, n$ )、つまり、

$$\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k = \delta_{jk} = \begin{cases} 0 & (j = k) \\ 1 & (j \neq k) \end{cases} \tag{6.3}$$

を満たす単位ベクトル  $\mathbf{e}_j$  を用いて表せる。ここで  $\delta_{jk}$  はクロネッカーのデルタ記号と呼ばれる。

力  $\mathbf{F}$  も  $\mathbf{F} = \sum_{j=1}^n F^j \mathbf{e}_j$  と書けるので、運動方程式は

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F} \iff \sum_{j=1}^n \left( m \frac{d^2 x^j}{dt^2} - F^j \right) \mathbf{e}_j = \mathbf{0} \iff m \frac{d^2 x^j}{dt^2} = F^j \tag{6.4}$$

と書き直す事ができる。ここでは、 $\mathbf{e}_j$  は時刻  $t$  に寄らず一定と仮定している。この運動方程式が、少し視点を変えた座標系で見たらどうなるかを考えていく。

### 6.2.1 座標系の回転

$\mathbf{e}'_j$  を座標系を回転して得られた新しい座標系の正規直行基底ベクトルとする。つまり、

$$\mathbf{e}'_j \cdot \mathbf{e}'_k = \delta_{jk} \tag{6.5}$$

となるので、各  $\mathbf{e}'_j$  は必ずもとの  $\mathbf{e}_k$  の線形結合で書ける:

$$\mathbf{e}'_j = \sum_{k=1}^n T_{jk} \mathbf{e}_k \Rightarrow \mathbf{e}'_j = T_{jk} \mathbf{e}_k \tag{6.6}$$

ここでは、和の縮約(アインシュタインの縮約)、つまり、一つの項で同じ添字が繰り返して用いられた時には、和の記号がなくてもその可能な値について和を取るという約束を採用している。

<sup>1</sup> $x$  の肩に乗る数字  $1, 2, \dots, n$  は  $n$  番目の座標を意味し、 $n$  乗ではない事に注意。

例えば、この変換を三次元で考えれば、

$$\begin{pmatrix} e'_1 \\ e'_2 \\ e'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix} \quad (6.7)$$

というようなものになっている。これは難しいことではなく、 $e'_i$  という基底ベクトルが、 $e_1, e_2, e_3$  の足し合わせで表現できるという事で、右図をみても直感的にそうなっていそうということは分かるだろう。今は、 $T$  を回転行列として考えるが、より一般には直行行列として考えられて、回転の他にも空間反転、鏡映などの変換も同様である。

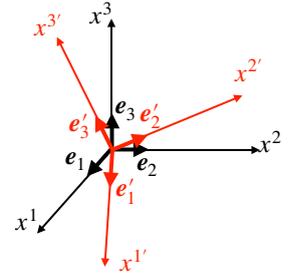


図 6.1: 座標の回転

この時、ベクトル  $\mathbf{x}$  の成分  $x^j$  も同様に以下の変換を受ける:

$$x^{j'} = T_{jk} x^k \iff \mathbf{x}' = T \mathbf{x} \quad (6.8)$$

(補足) なぜならば、原点を共有する座標系の回転において、位置ベクトル  $\mathbf{x}$  とその変換後の  $\mathbf{x}'$  は同じものなので、

$$\mathbf{x} = x^k e_k = x^{j'} e'_j = \mathbf{x}' \quad (6.9)$$

なので、

$$\begin{aligned} x^{j'} &= \mathbf{x}' \cdot e'_j \\ &= x^k e_k \cdot e'_j \\ &= x^k e_k \cdot T_{jl} e_l \\ &= x^k T_{jl} \delta_{kl} \\ &= T_{jk} x^k \end{aligned} \quad (6.10)$$

となるからである。(補足終わり)

一般に、基底ベクトル  $e_j \rightarrow e'_j$  に対して、ベクトル  $\mathbf{A} = A^j e_j$  は変換則

$$A^j \rightarrow A^{j'} = T^j_k A^k = \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^k} A^k \iff \mathbf{A}' = T \mathbf{A} \quad (6.11)$$

に従う。これは、ベクトル (反変ベクトル) の定義でもある。

結果として、座標同士の関係に加えて外力ベクトル  $\mathbf{F}$  の成分も同様に変換されるので

$$T \left( m \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} - \mathbf{F} \right) = m \frac{d^2 \mathbf{x}'}{dt^2} - \mathbf{F}' \quad (6.12)$$

と書ける。よって、元の座標系で運動方程式  $m \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} - \mathbf{F}$  が成り立つとき、それを回転して得られた新しい座標系でも同じ形の運動方程式  $m \frac{d^2 \mathbf{x}'}{dt^2} - \mathbf{F}'$  が成り立つ。

もっと簡単に書けば、二次元座標の回転の場合、

$$\begin{cases} x' = x \cos \theta + y \sin \theta \\ y' = -x \sin \theta + y \cos \theta \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \mathbf{x}' = T \mathbf{x} \quad (6.13)$$

となり、外力ベクトル  $\mathbf{F}$  の成分も同じ変換に従うので、

$$\begin{pmatrix} F'_x \\ F'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix} \iff \mathbf{F}' = T \mathbf{F} \quad (6.14)$$

となる。

**共変は不変とは異なる事に注意したい。** 不変というのは全く変わらない事を意味するが、上で見たような変換の場合、座標成分の値は変化している。値は変わるものの、形を変えていない。共変の代わりに形不変と呼ぶ事もある。

## 6.2.2 ガリレイ変換

ニュートンの運動方程式の共変性はもう少し広い変換の下で結論できる。次のように、時刻  $t$  と空間座標  $x^j$  を変える変換を考える。

$$\begin{cases} t \rightarrow t' = t - c \\ x^j \rightarrow x^{j'} = T^j_k x^k - u^j t - a^j \end{cases} \quad (6.15)$$

ここで、 $c$  は定数で、 $u^j$  と  $a^j$  は時間変化しない定ベクトル  $\mathbf{u}$  と  $\mathbf{a}$  の成分である。この変換では、以下の四種類の変換を含んでいる。

- (i) 時間推進  $t \rightarrow t - c$
- (ii) 平行移動  $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r} - \mathbf{a}$
- (iii) ガリレイ変換  $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r} - \mathbf{u}t$
- (iv) 直行回転  $\mathbf{r} \rightarrow T\mathbf{r}$

ガリレイ変換というのは、速度  $\mathbf{u}$  で移動する座標への変換のことである。これらの変換を合成した際にも、運動方程式が形を変えないことを確認する。

まず、時間微分に関しては、とる時間を移動したとしても微小時間は変化しないので、

$$\frac{d}{dt'} = \frac{dt}{dt'} \frac{d}{dt} = \frac{d}{dt} \quad (6.16)$$

となる。まず、変換後の空間座標  $x^{j'}$  を時間微分すると、

$$\frac{d}{dt} x^{j'} = T^j_k \dot{x}^k - u^j \quad (6.17)$$

となり、さらに時間微分すると、

$$\frac{d^2}{dt^2} x^{j'} = T^j_k \ddot{x}^k \iff \ddot{\mathbf{r}}' = T\ddot{\mathbf{r}} \quad (6.18)$$

が得られ、加速度ベクトル  $\ddot{\mathbf{r}}$  は、座標の時間推進・平行移動・ガリレイ変換・直行回転の下で共変であることがわかる。なお相対論的効果も考慮した変換はローレンツ変換と呼ばれる。

## 6.3 Lagrange 方程式の共変性

ニュートンの運動方程式  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$  は、質点のデカルト座標においてのみ成り立ち、上記のように回転、並進、Galilei 変換後の座標で共変であった。一方で、Lagrange 方程式では、一般化座標を導入しており座標系に関して何ら制限はない。つまり、**どのような座標系を選んでも同じ方程式になる**。

もっとも単純な例として、二次元平面内での質点の運動を考えてみよう。まず、ニュートンの運動方程式の  $x, y$  成分を直接書き下せば、

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F_x = -\frac{\partial U(x, y)}{\partial x} \\ m\ddot{y} = F_y = -\frac{\partial U(x, y)}{\partial y} \end{cases} \quad (6.19)$$

となる。一方で、この系の Lagrangian は、

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - U(x, y) \quad (6.20)$$

となり、Lagrange 方程式に代入すれば、

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \Rightarrow m\ddot{x} + \frac{\partial U(x, y)}{\partial x} = 0 \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \Rightarrow m\ddot{y} + \frac{\partial U(x, y)}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (6.21)$$

となって、上記のニュートンの運動方程式の場合と一致する。

では、極座標の場合はどうなるか (以前の授業でも扱ったが)、再度考えてみよう。例えば、上で求めたニュートンの運動方程式がそのまま形を変えずに、

$$\begin{cases} m\ddot{r} = -\frac{\partial U(x(r, \theta), y(r, \theta))}{\partial r} \\ m\ddot{\theta} = -\frac{\partial U(x(r, \theta), y(r, \theta))}{\partial \theta} \end{cases} \quad (6.22)$$

となれば、ニュートンの運動方程式でも物事は綺麗に収まる訳だが、そうは行かない。

ニュートンの運動方程式を極座標で用いる場合は、

$$\begin{cases} x = r \cos\theta \\ y = r \sin\theta \end{cases} \quad (6.23)$$

と変換してから、これらの時間微分を求め、(6.19) に代入する必要がある。まず、一度微分すると、

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{r} \cos\theta - r\dot{\theta} \sin\theta \\ \dot{y} = \dot{r} \sin\theta + r\dot{\theta} \cos\theta \end{cases} \quad (6.24)$$

となり、もう一度微分することで、

$$\begin{cases} \ddot{x} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \cos\theta - (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \sin\theta \\ \ddot{y} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \sin\theta + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \cos\theta \end{cases} \quad (6.25)$$

が得られる。これを上記の、運動方程式に代入すれば、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \\ m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \end{pmatrix} &= - \begin{pmatrix} \frac{\partial U(x, y)}{\partial x} \\ \frac{\partial U(x, y)}{\partial y} \end{pmatrix} \\ \Rightarrow m \begin{pmatrix} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \end{pmatrix} &= - \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial U(x, y)}{\partial x} \\ \frac{\partial U(x, y)}{\partial y} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\cos\theta \frac{\partial U(x, y)}{\partial x} - \sin\theta \frac{\partial U(x, y)}{\partial y} \\ \sin\theta \frac{\partial U(x, y)}{\partial x} - \cos\theta \frac{\partial U(x, y)}{\partial y} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (6.26)$$

となる。ここで、合成関数の微分と (6.23) より、

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial}{\partial y} = \cos\theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta \frac{\partial}{\partial y} \quad (6.27)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial x}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial y}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial y} = -\sin\theta \frac{\partial}{\partial x} + \cos\theta \frac{\partial}{\partial y} \quad (6.28)$$

が得られるので、これらを用いると、

$$\begin{aligned} m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) &= -\frac{\partial U}{\partial r} \\ m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) &= -\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (6.29)$$

と運動方程式をまとめることができる。これは、デカルト座標での運動方程式と比べると、形は変わっているし、計算もかなり面倒になっている。そして、三次元やより多次元の場合の事を考えると、更に計算量が増える事になる。

同じことを Lagrange 方程式で考えてみる。Lagrange 方程式を用いて計算する場合は、極座標での Lagrangian を準備すればよく、

$$L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - U(r, \theta) \quad (6.30)$$

となる。これを後は、Lagrange 方程式に代入して計算すれば、

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \Rightarrow m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) + \frac{\partial U}{\partial r} = 0 \quad (6.31)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} = 0 \quad (6.32)$$

というように、Lagrangian を与えたのみで運動方程式が得られた。

### 6.3.1 Lagrange 方程式の点変換における共変性

上で紹介したような変換 (例えば、デカルト座標から極座標へなど) の事を、より一般には点変換と呼ぶ。Lagrange 方程式は点変換で共変である事を示していく (メモ参照)。

## 第7章 対称性と保存則 (1): 運動の積分

これまでの力学の授業では、系の時間発展に対してエネルギーや運動量、角運動量などは(条件にもよるが)保存されると言われてきたと思う。これらは保存量と呼ばれるが、この章では、保存量が Lagrangian の対称性と関係していることをみていきたい。

### 7.1 運動の積分

一般座標を用いて書かれた Lagrange 方程式:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^k} = 0 \quad (k = 1, \dots, K) \quad (7.1)$$

は、 $\{q^k\}$  ( $k = 1, \dots, K$ ) に関する二階微分方程式であるから、全部で  $2K$  個の自由度を持つ。例えば、ある時刻での位置と速度に対応するそれぞれ  $K$  個の定数を指定すれば、理想的にはその後の運動は一意に定まるはずだ。ただし、理想化された単純な系を除けば、そのような初期条件で決まるパラメータを用いて時間の関数  $q^k$  ( $k = 1, \dots, K$ ) を具体的に書き下すことはできない。

一方、 $\{q^k\}$  と  $\{\dot{q}^k\}$  のある関数が力学系の運動を通じて

$$C(q^1, \dots, q^K, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^K, t) = \text{const} \quad (7.2)$$

となることがある。これらは「運動の積分」(integrals of motion)、あるいは「保存量」と呼ばれ、系の運動の振る舞いを理解する上で重要な役割を果たす。例えば、系全体のエネルギー・運動量・角運動量などは、代表的な運動の積分である。そして、力学系が何らかの対称性を持つ時には、必ずそれに対応する運動の積分(保存量)が存在する。

#### 7.1.1 循環座標

ある系の Lagrangian がある特定の座標  $q^c$  を含まない場合を考える。この時、

$$L = L(q^1, \dots, q^{c-1}, q^{c+1}, \dots, q^K, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^K, t) \quad (7.3)$$

と表せる。このような座標  $q^c$  の事を循環座標と呼ぶ。この循環座標に対して、具体的に Lagrange 方程式を計算してみると、

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^c} \right) = \frac{\partial L}{\partial q^c} = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^c} = \text{const} \equiv p^c \quad (7.4)$$

が成り立つ。ここで一般に、

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \equiv p^k \quad (7.5)$$

の事を、一般化運動量と呼ぶ。なので、(7.4) 式は「循環座標に対応する一般化運動量は運動の積分となる」ことを意味する。言い換えれば、Lagrangian が  $q^c$  の変化に対して不変であるという対称性に対応した運動の積分が  $p^c$  であるとも言える。分かりにくいかもしれないので、いくつか例をあげる。

#### 7.1.2 例 1: 非保存力下での質点の運動

一番簡単な例は、保存力が働かない系で速度  $\dot{x}$  で運動する質量  $m$  の質点である。この場合、Lagrangian は、

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \quad (7.6)$$

となるので、Lagrangian は座標  $x$  に依存しない。この場合、座標  $x$  が循環座標となり、

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{d}{dt} (m\dot{x}) = 0 \Rightarrow m\dot{x} = \text{const} \quad (7.7)$$

が得られ、運動量が保存されていることがわかる。

### 7.1.3 例 2: 万有引力を受けて運動する物体の運動方程式

次は、ある大きな天体 (質量  $M$ ) の周りを質量  $m$  の小さな物体が運動するときを考える。  $M \gg m$  として、大きな天体は動かないものとして仮定する。大きな天体の位置を原点として、この系のラグランジアンは極座標  $(r, \theta)$  を用いて、

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + G\frac{Mm}{r} \quad (7.8)$$

と書ける。ここで、 $\theta$  はラグランジアンに含まれていないため、循環座標である。そのため、循環座標  $\theta$  に対応する保存量が存在する事が予測できる。この場合、 $r$  と  $\theta$  について、Lagrange の運動方程式をそれぞれ立ててみると、

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \frac{\partial L}{\partial r} \Leftrightarrow m\ddot{r} = mr\dot{\theta}^2 - G\frac{Mm}{r^2} \quad (7.9)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = 0 \Leftrightarrow mr^2\dot{\theta} = \text{const.} \quad (7.10)$$

となり、上に示した式の 2 番目の式は角運動量保存則を表している。ここで、 $l = mr^2\dot{\theta}$  とおけば、 $l$  は定数なので  $\dot{\theta} = \frac{l}{mr^2}$  とおくことで運動方程式は

$$m\ddot{r} = \frac{l^2}{mr^3} - G\frac{Mm}{r^2} \quad (7.11)$$

となり、結局 1 変数問題に帰着させることができる。一般に循環座標が存在すればその分だけ変数を減らすことが可能になる。

## 7.2 対称性と保存則

物理を学んでいくと「対称性」という言葉が出てくる。今回、解析力学を学ぶ上で初めてこの「対称性」という言葉を使うが、簡単にいえば「**区別出来ない状態を含むこと**」を対称性があるという (図 7.1)。例えば図形を考えてみると、正三角形の場合、120 度 ( $2\pi/3$ ) 回転させる毎に区別できなくなり、正方形の場合は、90 度 ( $\pi/2$ ) 回転させる毎に区別できなくなる。図形の角の数を増やしていけば、どんどん回転に対して対称性は高くなっていく。そして最終的には、円のように回転に対して連続な対称性を持つ図形を考えられる。

対称性 = 区別出来ない状態を含むこと。

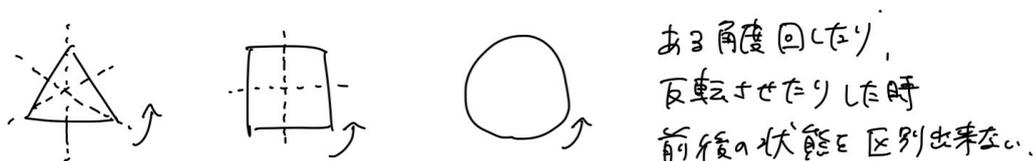


図 7.1: 対称性とは。

これ以降の章では、我々が運動を記述する上で“任意”に選んでいるものに注目する。選び方を気にしないということは、つまり、「区別出来ない状態を含むこと」である。そして、それらの対称性から保存則が見つけれられるという事を確認していく。

## 7.2.1 時間の一様性とエネルギー保存則

時間の原点は任意に選ぶことができる。これはそもそも我々の住む4次元時空が、時間座標を定数  $t_0$  だけ平行移動:

$$t \rightarrow t + t_0 \quad (7.12)$$

しても不変であるという時間に対する並進対称性を持っているおかげである。この性質を時間の一様性と呼ぶこともある。例えば、国によって時差があり、午前0時を原点とすれば、国によって時間の原点は異なる。一方で、各国において物理法則は変わらないのは自明だろう。

系が時間に関して並進対称性を持つとは、その系の Lagrangian が陽には時間に依存しない、すなわち  $L = L(q, \dot{q})$  と言い換えることができる。この場合、

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \frac{\partial L}{\partial t} + \sum_k \left( \frac{\partial L}{\partial q^k} \frac{dq^k}{dt} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \frac{d\dot{q}^k}{dt} \right) \\ &= \sum_k \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \right) \dot{q}^k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \frac{d\dot{q}^k}{dt} \right] \\ &= \frac{d}{dt} \left( \sum_k \dot{q}^k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left( \sum_k p^k \dot{q}^k \right) \\ &\Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \sum_k p^k \dot{q}^k - L \right) = 0 \end{aligned} \quad (7.13)$$

となる。ここでは、 $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$  と  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^k} = 0$ 、 $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \equiv p^k$  を使っている。これより

$$H(q, p) \equiv \sum_k p^k \dot{q}^k - L \quad (7.14)$$

は、時間の並進対称性に対応する運動の積分となり、Hamiltonian と呼ばれる。

この Hamiltonian はこのままだと良く分からない物理量であるが、最も単純な例は、保存力下での全力的エネルギー ( $E = T + U$ ) である。つまり、エネルギー保存則を示した事になる。例えば、運動エネルギーを  $T = \frac{1}{2} m \dot{r}^2$ 、ポテンシャルエネルギーを  $U = mgr$  とすれば、

$$\begin{aligned} H \equiv p\dot{r} - L &= m\dot{r}^2 - \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + mgr \\ &= \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + mgr \\ &= T + U \end{aligned} \quad (7.15)$$

となることが分かるだろう。このような場合、 $U = U(q)$  であるが、より一般的には  $\dot{q}$  にも依存する場合がある。そのような場合でも、Hamiltonian は時間の並進対称性に対する運動の積分ではあるが、単純な運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの和という形にはならない。

## 7.2.2 空間の一様性と運動量保存則

時間と同様に空間にも一様性がある。時間と同じように、座標の原点を任意に選んでも、物理法則は不変であることは自明だろう。具体的には、 $\mathbf{r}$  をデカルト座標とした時、任意の定数ベクトル  $\mathbf{r}_0$  だけの平行移動:

$$\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r} + \mathbf{r}_0 \quad (7.16)$$

に対して物理法則が不変であり、空間並進対称性を持つとも言える。つまり、この  $\mathbf{r}_0$  だけの平行移動を微量量として選んだ時、その変化に対して Lagrangian は不変でなければならない。この時、 $\delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_0$  なら

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} \cdot \delta \mathbf{r} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}_0 \quad (7.17)$$

となるので、 $r_0$ によらず $\delta L = 0$ となるためには、

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = 0 \quad (7.18)$$

である必要がある。これは Lagrange 方程式を用いれば、

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = 0 \quad (7.19)$$

より

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \mathbf{p} = \text{const.} \quad (7.20)$$

が得られ、運動量が空間並進対称性に対応する運動の積分である。これは多粒子系でも成り立つ。

### 7.2.3 時間の等方性と角運動量保存則

最後に、空間が等方的 (空間の回転に対して物理法則が不変=どの角度から見ても物理法則は不変) であることから、回転対称性に対応する運動の積分を求める。

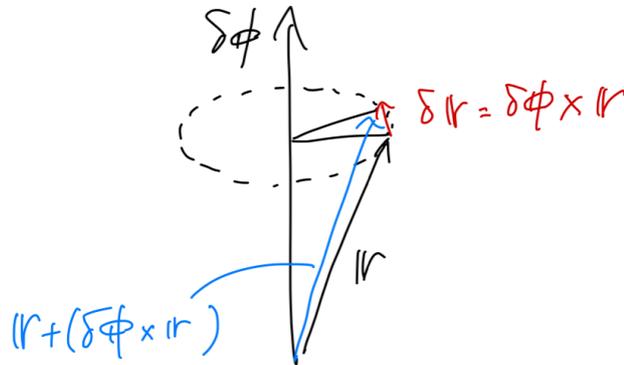


図 7.2: 回転に対するベクトルの変化。

図 7.2 のように、ベクトル  $\delta\phi$  の向きを回転軸とした時それに対して時計まわりに絶対値  $|\delta\phi|$  の角度だけ座標を回転させる操作を、 $\delta\phi$  に関する空間回転と定義する。この回転に対して、デカルト座標での位置ベクトルと速度ベクトルは

$$\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r} + \delta\mathbf{r} = \mathbf{r} + (\delta\phi \times \mathbf{r}), \quad \mathbf{v} \rightarrow \mathbf{v} + \delta\mathbf{v} = \mathbf{v} + (\delta\phi \times \mathbf{v}) \quad (7.21)$$

と変化する。

この座標変換に対して Lagrangian は

$$\begin{aligned} \delta L &= \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} \cdot \delta\mathbf{r} + \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} \cdot \delta\mathbf{v} \\ &= \frac{d\mathbf{p}}{dt} \cdot (\delta\phi \times \mathbf{r}) + \mathbf{p} \cdot (\delta\phi \times \mathbf{v}) \\ &= \delta\phi \cdot \left( \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p} \right) \\ &= \delta\phi \cdot \frac{d}{dt} (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = 0 \end{aligned} \quad (7.22)$$

と変形する (内積と外積の関係:  $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$  を使用している)。この式では任意の  $\delta\phi$  で 0 になる必要があるので、

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \text{const.} \quad (7.23)$$

となり、角運動量が保存されることを意味し、回転対称性に対応する運動の積分であることがわかる。

## 第8章 対称性と保存則 (2): ネーターの定理

Lagrangian が持つ対称性を具体的に運動の積分と結びつけるのがネーターの定理 (Noether's theorem) である。一般座標  $q$  に対して、あるパラメータ  $s$  で記述される変換  $q(s), \dot{q}(s)$  を考える (前の章でやったような座標  $\mathbf{r}$  や時刻  $t$  を動かすような変換をイメージ)。ただし、 $s = 0$  において、 $q(0) = q, \dot{q}(0) = \dot{q}$  が成り立っているものとする。Lagrangian  $L(q, \dot{q})$  がこの変換に対して不変である条件は

$$\frac{dL(q(s), \dot{q}(s))}{ds} = \frac{\partial L(q(s), \dot{q}(s))}{\partial q(s)} \frac{\partial q(s)}{\partial s} + \frac{\partial L(q(s), \dot{q}(s))}{\partial \dot{q}(s)} \frac{\partial \dot{q}(s)}{\partial s} = 0 \quad (8.1)$$

である。特に  $s \rightarrow 0$  の極限を考えれば、

$$\begin{aligned} 0 &= \left. \frac{\partial L(q(s), \dot{q}(s))}{\partial q(s)} \frac{\partial q(s)}{\partial s} \right|_{s=0} + \left. \frac{\partial L(q(s), \dot{q}(s))}{\partial \dot{q}(s)} \frac{\partial \dot{q}(s)}{\partial s} \right|_{s=0} \\ &= \left. \frac{d}{dt} \frac{\partial L(q(s), \dot{q}(s))}{\partial \dot{q}(s)} \frac{\partial q(s)}{\partial s} \right|_{s=0} + \left. \frac{\partial L(q(s), \dot{q}(s))}{\partial \dot{q}(s)} \frac{d}{dt} \frac{\partial q(s)}{\partial s} \right|_{s=0} \\ &= \left. \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L(q(s), \dot{q}(s))}{\partial \dot{q}(s)} \frac{\partial q(s)}{\partial s} \right) \right|_{s=0} \end{aligned} \quad (8.2)$$

が得られて、この括弧の中身がパラメータ  $s$  による変換で保存される、つまり

$$I \equiv \left. \frac{\partial L(q(s), \dot{q}(s))}{\partial \dot{q}(s)} \frac{\partial q(s)}{\partial s} \right|_{s=0} \quad (8.3)$$

が運動の積分になることが分かる。これをネーターの定理と呼ぶ。具体的に  $N$  個の自由質点系

$$L = \sum_a \frac{1}{2} m_a (\dot{x}_a^2 + \dot{y}_a^2 + \dot{z}_a^2) \quad (8.4)$$

を例にとり、すでに求めた運動量・角運動量・エネルギーの保存則をネーターの定理からもう一度導いてみる。

### 8.0.1 空間の一様性: 運動量保存則

$x$  方向の並進を例として考えれば、変換  $q(s)$  として

$$x_a(s) = x_a + s \quad (a = 1, \dots, N) \quad (8.5)$$

を選べば良い。これをネーターの定理に入れると、

$$I_x = \sum_a \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_a} \frac{\partial x_a(s)}{\partial s} \right|_{s=0} = \sum_a m_a \dot{x}_a \quad (8.6)$$

となり、ただちに  $x$  方向の運動量保存則が得られる。

### 8.0.2 空間の等方性: 角運動量保存則

次に円筒座標をとり  $z$  軸周りの回転を考えて、 $q(s)$  として

$$x_a(s) = r \cos(\theta + s), \quad y_a(s) = r \sin(\theta + s) \quad (a = 1, \dots, N) \quad (8.7)$$

を選ぶ。これをネーターの定理に入れると、

$$\begin{aligned} I &= \sum_a \left( \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_a} \frac{\partial x_a(s)}{\partial s} \right|_{s=0} + \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_a} \frac{\partial y_a(s)}{\partial s} \right|_{s=0} \right) \\ &= \sum_a m_a (-\dot{x}_a y_a + \dot{y}_a x_a) \end{aligned} \quad (8.8)$$

となり、 $z$  方向の角運動量保存則が得られる。

### 8.0.3 時間の一様性: エネルギー保存則

ネーターの定理である (8.3) を求めた際、時間以外の座標変換しか考慮していなかったため、時間の並進対称性を考えるには、少し工夫が必要である。そこでまず、時間関数を  $t \rightarrow \tau(t)$  と変換して最小作用の原理を

$$\delta S = \delta \int_{t_A}^{t_B} \left( q, \frac{dq}{dt}, t \right) dt = \delta \int_{\tau_A}^{\tau_B} \left( q, \frac{dq/d\tau}{dt/d\tau}, t \right) \frac{dt}{d\tau} d\tau = 0 \quad (8.9)$$

のように書き直してみる。この式の被積分関数を、 $t$  と  $dt/d\tau$  をあらたな独立変数として追加した Lagrangian

$$L' \left( q, \frac{dq}{dt}, t, \frac{dt}{d\tau} \right) \equiv L \left( q, \frac{dq/d\tau}{dt/d\tau}, t(\tau) \right) \quad (8.10)$$

と解釈する。この時、座標  $t$  に関する Lagrange 方程式は

$$\frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial L'}{\partial (dt/d\tau)} \right) - \frac{\partial L'}{\partial t} = 0 \quad (8.11)$$

である。(8.10) 式をこれに代入すると、第一項は

$$\begin{aligned} \frac{\partial L'}{\partial (dt/d\tau)} &= L - \frac{dq/d\tau}{(dt/d\tau)^2} \frac{\partial L}{\partial (dq/dt)} \frac{dt}{d\tau} \\ &= L - \frac{dq/d\tau}{dt/d\tau} p = L - p\dot{q} = -H \end{aligned} \quad (8.12)$$

となる。一方で第二項の部分は

$$\frac{\partial L'}{\partial t} = \frac{\partial L}{\partial t} \frac{dt}{d\tau} = \frac{\partial(p\dot{q} - H)}{\partial t} \frac{dt}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial t} \frac{dt}{d\tau} \quad (8.13)$$

と変形できる。この第一項と第二項の計算を合わせれば、結果として Hamiltonian  $H$  だけで書き直され

$$\frac{d(-H)}{d\tau} + \frac{\partial H}{\partial t} \frac{dt}{d\tau} = 0 \Rightarrow \frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} \quad (8.14)$$

となる。したがって、 $H$  が陽に  $t$  に依存しない ( $\partial H/\partial t = 0$ ) ならば、 $H$  すなわちエネルギーが運動の積分となる ( $dH/dt = 0$ ) ことが示される。

上述の導出を見直せば、時間変数  $\tau$  を導入して、 $t(\tau)$  を一般座標とみなして追加した Lagrangian  $L'$  に対して  $t = \tau + s$  の並進対称性を課したことになっている。この場合、ネーターの定理の式を

$$I = \left. \frac{\partial L'(q, \dot{q})}{\partial (dt/d\tau)} \frac{dt(s)}{ds} \right|_{s=0} = -H \quad (8.15)$$

というように書き換えれば、ネーターの定理から、時間の並進対称性に対応するエネルギー保存則も導くことができる。

## 第9章 Lagrangianの任意性, ビリアル定理

### 9.1 Lagrangianの任意性

これまで、「Lagrangian は運動エネルギーからポテンシャルエネルギーを引いたもの」と考えてきているが、実は Lagrangian が  $L = T - U$  の形をしていなくても運動方程式が導けてしまう。例えば、今 Lagrangian が、

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - mgx \quad (9.1)$$

という形をしていたとする。これにある定数  $\alpha$  を掛けて

$$L' = \alpha L = \alpha \left( \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - mgx \right) \quad (9.2)$$

みたいな物を考えたとしても、得られる運動方程式は変わらない。他にも定数項を足したとしても、運動方程式自体は変わらない事は自明だろう。運動方程式を求めるだけであれば、得たい運動方程式を導く Lagrangian は無数に存在する。これは Lagrangian の任意性や不定性などと呼ばれる。一方で、「今まで、そう思っていたのはなんだったんだ？ 全て水の泡か？」などと思う必要はなく、エネルギー (Hamiltonian) が保存されるようにエネルギーの次元を持った物を Lagrangian として設定することは理にかなったことと言える。

#### 9.1.1 ガリレイの相対性原理でみる任意性

Lagrangian の任意性の中でも

$$L' = L + \frac{d}{dt}W(q, t) \quad (9.3)$$

という有名なものがある。つまり、任意の関数  $W(q, t)$  の時間微分を Lagrangian に加えても、運動方程式は変わらないことを意味する。この性質は Hamilton 力学における正準変換でも重要な働きをする。まずは、一般的な話の前に具体例として、ガリレイの相対性原理について考えてみる。

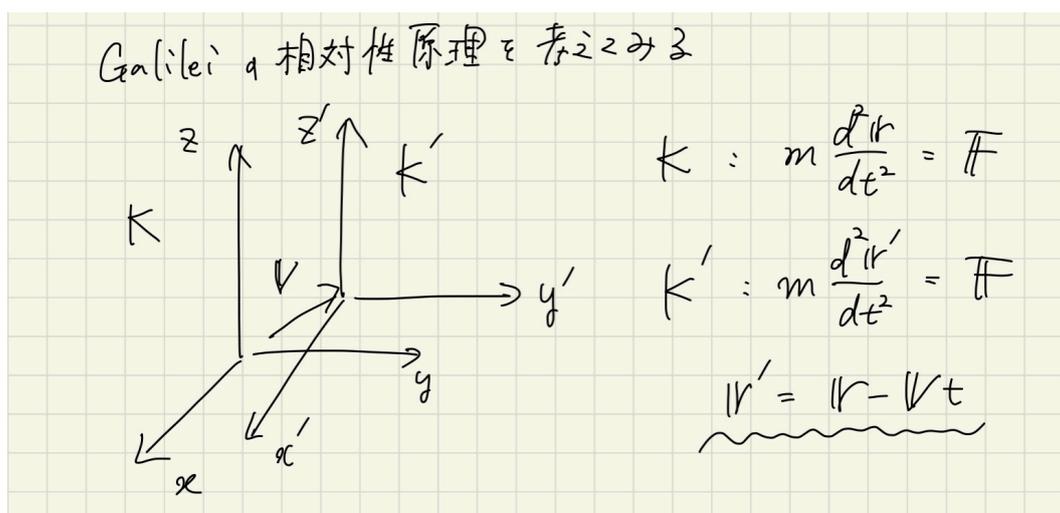


図 9.1: ガリレイの相対性原理。

図 9.1 のように、あるデカルト座標  $K$  から一定の速度  $V$  で移動している座標系  $K'$  での運動を考える。この時、ポテンシャルエネルギーを考えなければ、それぞれの Lagrangian は

$$\begin{aligned} K : L &= \frac{1}{2}mv^2 \\ K' : L' &= \frac{1}{2}m(v-V)^2 \\ &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}m(V^2 - 2vV) \\ &= L + \frac{1}{2}m(V^2 - 2vV) \end{aligned} \tag{9.4}$$

という形になり、 $K'$  の方は、 $K$  の Lagrangian に  $v = dx/dt$  の関数を足した Lagrangian を持つと解釈できる。この二つ目の式を書き換えると、

$$L = L' - \frac{1}{2}m(V^2 - 2vV) \tag{9.5}$$

となり、この Lagrangian を

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} \right] \delta q \tag{9.6}$$

に入れてみると

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial q} &= \frac{\partial L'}{\partial q} \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}} \right) + \frac{d}{dt}(mV) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}} \right) \end{aligned} \tag{9.7}$$

となり、元の Lagrangian に足していた項が消える。これによって、

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L'}{\partial q} \right] \delta q = 0 \tag{9.8}$$

も成り立つことになり、少し変形した (何かを足した) Lagrangian でも同じ運動方程式を導くことが分かる。このガリレイの相対性原理で出てくる Lagrangian の新しい項は、座標の時間微分 ( $v = \dot{x}$ ) を含むので、最初の

$$L' = L + \frac{d}{dt}W(q, t)$$

の具体例の一つとして考えられる。加えて、ガリレイ変換において Lagrange 方程式が共変であることも意味している。ある座標  $W(q, t)$  の関数を時間微分したものを Lagrange 方程式に入れても、 $\dot{q}$  で偏微分し時間微分すれば消えてしまうのが分かるだろう。

それでは、この新しい項を足した場合にも運動方程式が変わらない事を簡単に調べてみる。もっとも簡単な調べ方として、新しい Lagrangian  $L'$  の作用の変分を考えると、

$$\begin{aligned} \delta S' &= \int_{t_A}^{t_B} L'(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}, t) dt - \int_{t_A}^{t_B} L'(q, \dot{q}, t) dt \\ &= \delta S + \int_{t_A}^{t_B} \frac{d}{dt} f(q + \delta q, t) dt - \int_{t_A}^{t_B} \frac{d}{dt} f(q, t) dt \\ &\simeq \delta S + \int_{t_A}^{t_B} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial q} \delta q \right) dt \\ &= \delta S + \left[ \frac{\partial f}{\partial q} \delta q \right]_{t_A}^{t_B} \\ &= \delta S \end{aligned} \tag{9.9}$$

ということが確認できる。これによって、ガリレイ変換のような条件をより一般的にして、任意の関数  $W(q, t)$  を時間微分したものを Lagrangian に足したとしても、運動方程式が変わらないことが分かる。

## 9.1.2 力学的相似則

この章の最初でも示したように、Lagrangian を定数倍しても、得られる運動方程式は変わらなかった。これは、いくつかの重要な場合に、運動方程式を具体的に積分することなしに、運動についてある本質的な結論を引き出す可能性を与える。

ポテンシャルエネルギーの項について、すべての座標  $q^i$  が  $\alpha$  倍された時

$$U \rightarrow U' \equiv U(\alpha q^1, \dots, \alpha q^k) = \alpha^n U(q^1, \dots, q^k) \quad (9.10)$$

というような関係式を満たしているとする。すなわち、 $U$  が座標の  $n$  次の同次関数である場合を考える (単に、座標の  $n$  乗の式で表せるということ)。この時、変換

$$q \rightarrow q' \equiv \alpha q, \quad t \rightarrow t' \equiv \beta t \quad (9.11)$$

を考える。座標をすべて  $\alpha$  倍した時、同時に時間を  $\beta$  倍している。具体的なイメージとしては、図 9.2 のような楕円軌道の運動を考えると良い。座標を  $\alpha$  倍広げることにより大きな軌道を描くが、この時、軌道の形は変わらない。

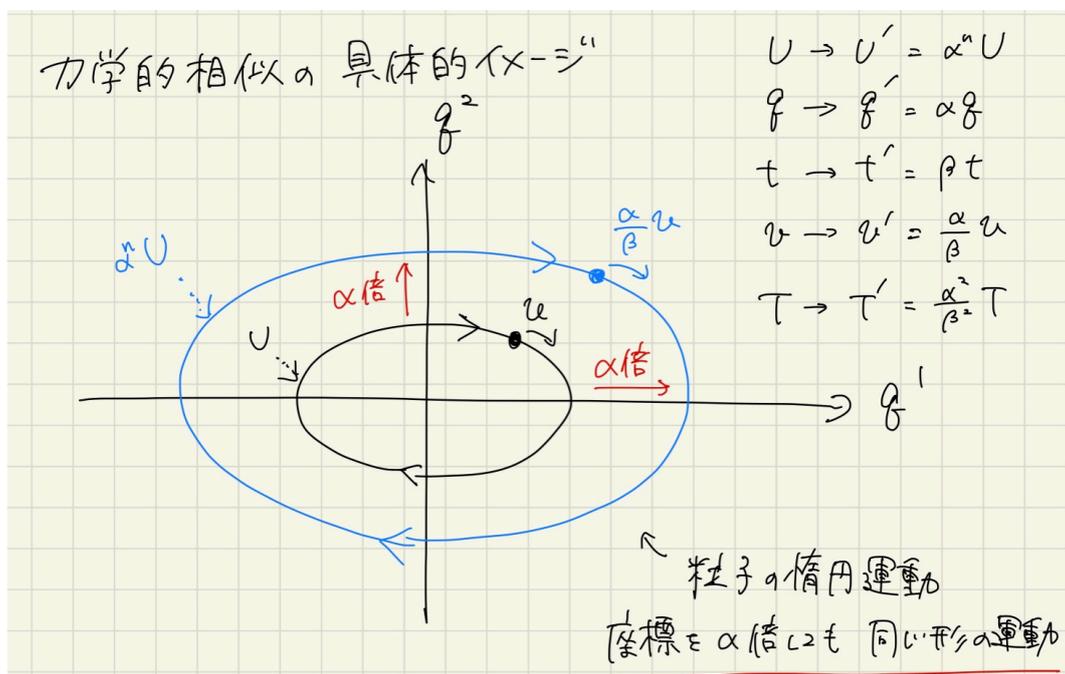


図 9.2: 力学的相似則の具体的なイメージ。

そのため、**運動の軌道が自己相似になっている**。この時、速度  $dq/dt$  は  $\alpha/\beta$  倍になり、運動エネルギーは  $\alpha^2/\beta^2$  倍になる。ポテンシャル・エネルギーの方は  $\alpha^n$  倍になる。この時、変換後の Lagrangian  $L'$  を元の Lagrangian  $L$  の定数倍 ( $\alpha^n$  倍) にするためには、

$$\begin{aligned} L' &= \frac{\alpha^2}{\beta^2} T - \alpha^n U \\ &= \alpha^n (T - U) \\ &= \alpha^n L \end{aligned} \quad (9.12)$$

となればよく、

$$\frac{\alpha^2}{\beta^2} = \alpha^n \Rightarrow \beta = \alpha^{1-\frac{n}{2}} \quad (9.13)$$

の関係が成り立つ場合であることが分かる。なので、座標が  $\alpha$  倍された時に、時間が  $\alpha^{1-\frac{n}{2}}$  倍される時、Lagrangian は定数倍 ( $\alpha^n$  倍) されるだけであり、運動は形を変えず (運動方程式は不変)、自己相似的な運動を意味することが分かる。

上の図でも示した通り、粒子の全ての座標を同じ倍率だけ変化させるということは、ある軌跡から、それと幾何学的に相似でその倍率だけ大きさの違うもう一つの軌跡に移ることである。つまり、「もしポテンシャル・エネルギーが座標の  $n$  次の同次関数であるならば、運動方程式は一連の幾何学的に相似な軌跡をえがき、その場合すべての運動の時間は

$$\frac{t'}{t} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{1-\frac{n}{2}} \quad (9.14)$$

の比をなす」。ここで、 $l'/l$  は二つの軌跡の大きさの比である。時間だけでなく、対応する軌跡上の対応する時刻における、任意の力学的量の値も比  $l'/l$  の一定のべきで表される。例えば速さ、エネルギー、角運動量については、

$$\frac{v'}{v} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{\frac{n}{2}}, \quad \frac{E'}{E} = \left(\frac{l'}{l}\right)^n, \quad \frac{L'}{L} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{1+\frac{n}{2}} \quad (9.15)$$

となる。いくつか、具体例を見てみる。

### 力学的相似則の例 1: 微小振動

バネについての質点の微小振動の場合、そのポテンシャルエネルギーは

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2 \quad (9.16)$$

というように、座標の 2 次関数で表される ( $n = 2$ )。式 (9.14) は、

$$\frac{t'}{t} = 1 \quad (9.17)$$

となるため、振動の周期は振幅に寄らないことが分かる。

### 力学的相似則の例 2: 重力ポテンシャル・クーロンポテンシャル

物体間の重力ポテンシャルは、

$$U(r) = -G\frac{m_1m_2}{r} \quad (9.18)$$

であり、電荷間のクーロンポテンシャルは、

$$U(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1q_2}{r} \quad (9.19)$$

というように、どちらも距離に反比例している。つまり、 $n = -1$  次の座標の同次関数である。この時、

$$\frac{t'}{t} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{\frac{3}{2}} \quad (9.20)$$

が得られる。これはつまり、公転周期の 2 乗は、軌道半径の 3 乗に比例するという、ケプラーの第三法則と結論づけることができる。

## 9.2 ビリアル定理

系の運動が有界 (空間のある領域内だけに限られている場合) で、かつポテンシャルエネルギーが座標の同次関数である時、ビリアル定理ものが成り立つことを確かめてみる。 $a$  個の質点の運動エネルギー  $T = \frac{1}{2} \sum_a m_a v_a$  を速度  $v_a$  で偏微分すると、

$$\sum_a \frac{\partial T}{\partial v_a} = \sum_a m_a v_a \quad (9.21)$$

となり、これに  $\mathbf{v}_a$  を掛けると、

$$\sum_a \mathbf{v}_a \frac{\partial T}{\partial \mathbf{v}_a} = \sum_a m_a \mathbf{v}_a^2 = 2T \quad (9.22)$$

となるが、左辺は運動量の定義から

$$\sum_a \mathbf{v}_a \frac{\partial T}{\partial \mathbf{v}_a} = \sum_a \frac{d\mathbf{r}_a}{dt} \cdot \mathbf{p}_a = \frac{d}{dt} \left( \sum_a \mathbf{p}_a \cdot \mathbf{r}_a \right) - \sum_a \mathbf{r}_a \cdot \dot{\mathbf{p}} \quad (9.23)$$

となるため、上式と組み合わせると、

$$2T = \frac{d}{dt} \left( \sum_a \mathbf{p}_a \cdot \mathbf{r}_a \right) - \sum_a \mathbf{r}_a \cdot \dot{\mathbf{p}} \quad (9.24)$$

が得られる。この等式を時間に関して平均してみる。まず、時間についての任意の関数  $f(t)$  の平均値を

$$\bar{f} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f(t) dt \quad (9.25)$$

と定義する。ここで、 $f(t)$  が有界な (つまり無限の値を取ることがない) 関数  $F(t)$  の時間についての導関数  $dF(t)/dt$  であると、その平均値はゼロになってしまう。実際に、

$$\bar{f} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \frac{dF}{dt} dt = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{F(\tau) - F(0)}{\tau} = 0 \quad (9.26)$$

となることが分かるだろう (分子  $F(x) - F(0)$  は有界なのに対して、分母は無敵大なので)。このような条件を考えれば、(9.24) を少し変形することができる。例えば今、空間の限られた領域の中で、しかも有限の速さで運動している状況を考えている。この場合、 $\sum_a \mathbf{p}_a \cdot \mathbf{r}_a$  は有界であるので消えて、

$$2\bar{T} = - \overline{\sum_a \mathbf{r}_a \cdot \dot{\mathbf{p}}} \quad (9.27)$$

となる (時間平均をとっている)。ニュートンの式にしたがって  $d\mathbf{p}/dt = -\partial U/\partial \mathbf{r}_a$  と置き換えると、

$$2\bar{T} = \overline{\sum_a \mathbf{r}_a \cdot \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_a}} \quad (9.28)$$

が得られる。ここでもし、ポテンシャル・エネルギーが全ての位置ベクトル  $\mathbf{r}_a$  についての  $n$  次の同次関数であるとする、 $n$  次の同時関数  $f$  に関するオイラーの定理

$$\sum_i x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = n f(x_1, \dots, x_k) \quad (9.29)$$

があるので、これを用いて

$$2\bar{T} = n\bar{U} \quad (9.30)$$

が得られ、これがビリアル定理である。

# 第10章 ビリアル定理と宇宙物理学

ビリアル定理は、宇宙物理学分野ではとても重要な役割をはたしているのので、いくつか例をあげながら、その面白さや重要性を議論したい。宇宙では、多くのものが重力多体系として記述されるため、色々な現象の性質をつかむためにビリアル定理がとても有効である。例えば、無数の粒子や天体の重力相互作用を考える場合が多く、重力ポテンシャルは  $n = -1$  次の座標の同次関数なので、運動エネルギーとの間に

$$2\bar{T} = -\bar{U} \quad (10.1)$$

という関係が保たれている場合が多い。この個々の粒子や天体の運動と重力ポテンシャルの簡単なつり合いの関係から、どのような事が言え、どのような発見があったかを見ていく。

## 10.1 宇宙でのガス収縮と星形成

天文学者・宇宙物理学者は、宇宙にある物質を多くの場合「ガス」と呼ぶ。基本的には、宇宙を構成する元素の約90%は水素である。そのため、水素を主成分としたガスの塊を重力で押し潰して星を作り、そのような星を重力で集めて銀河を作りながら、宇宙の様々なスケールの天体が形成されている。

例えば、図 10.1 は近年打ち上げられたジェイムズ・ウェッブ宇宙望遠鏡で撮影されたへび座の星雲 M16「わし星雲」の画像であり、太陽よりもずっと重い星が誕生しつつある現場である。実は、このような**ガス雲から星ができる条件は、力学の初歩的な知識のみで考えることができる。**

まず、唐突ではあるが脱出速度の考え方を復習する。ある質量  $M$  の大きな天体上の質量  $m$  の物質を上方へ速度  $v$  で投げ込んだ時に、

$$\frac{1}{2}mv^2 \geq G\frac{Mm}{r} \quad (10.2)$$

というように重力ポテンシャルより物質の運動エネルギーが大きくなる事が出来れば、物質は天体の重力圏を抜け出すことができた。これと全く同じ事を考えればよく、**ガスの塊があった時、その表面の粒子が重力圏から逃げ出せない場合、徐々にそのガス雲は重力によって収縮し星を形成する**と考えられる。

基本的にはガス雲内部の粒子は重力多体系であり、ビリアル定理にしたがって運動している。一方で、何らかの拍子に密度ムラが生じ、

$$|\bar{U}| > 2\bar{T} \quad (10.3)$$

というように、ある領域で重力ポテンシャルが優位になった場合、重力崩壊が開始する。これが星形成の始まりである。重力による収縮の力がそれに対抗する熱や磁場の全圧力  $P_T$  の勾配による力を上回る条件は

$$\frac{P_T}{R} < \frac{GM\rho}{R^2} \Rightarrow R > \lambda_J \simeq \sqrt{\frac{P_T}{G\rho^2}} \quad (10.4)$$

というように考えられる。この  $P_T$  と  $\rho$  で決まる長さのスケール  $\lambda_J$  をジーンズ長という。ジーンズ長よりも大きなスケールはすべて不安定で重力収縮し、小さなスケールは安定である。要は、ある密度と圧力のガスを仮定した時、そのガス雲がこのスケールより大きければ重力収縮し、星形成が始まる。収縮可能な最小質量は、 $P_T \simeq \rho kT/m$  として、

$$M_J \sim \rho \left(\frac{\lambda_J}{2}\right)^3 \sim 10^5 \left(\frac{T}{10^2 \text{ K}}\right)^{3/2} \left(\frac{\rho}{10^{-24} \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}}\right)^{-1/2} M_\odot \quad (10.5)$$

となり、これをジーンズ質量と呼ぶ。ここで使っている  $\rho = 10^{-24} \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ 、 $T = 10^2 \text{ K}$  は、平均的な HI 領域(中性水素ガスの星間空間)のパラメータであるが、通常の星(例えば太陽ぐらいの星)を作ろうと思うと、これよりも低温・高密度な分子雲(冷たくて濃いガスの塊)が必要であることがわかる。



図 10.1: ジェイムズ・ウェッブ宇宙望遠鏡の近赤外線カメラ (NIRCam) で撮影された「わし星雲」の“創造の柱” Credit: NASA, ESA, CSA, STScI; Image Processing: Joseph DePasquale (STScI), Anton M. Koekemoer (STScI), Alyssa Pagan (STScI).

## 10.2 星の静水圧平衡と負の比熱

地球上でも、高い山に登ったり、その山から下ったりすると耳が変になり、気圧の変化を体感できる。高い場所では、気圧が低く、低い場所では気圧は高い。これは、重力で引きつけられる大気は、地表では圧力が大きくなり、より上方ではこの圧力に押され大気がどんどん薄くなっていくような圧力勾配が生まれているからである。このように重力と圧力勾配力が釣り合っている状態のことを静水圧平衡 (hydrostatic equilibrium) と呼ぶ。

恒星など、ガスからなる天体内部の静水圧平衡は、密度を  $\rho$ 、天体の中心からの距離を  $r$ 、 $r$  での圧力を  $P$ 、万有引力定数を  $G$ 、 $r$  より内側にある部分の質量を  $M_r$  とすると、

$$\frac{dP}{dr} = -G \frac{M_r \rho}{r^2} \quad (10.6)$$

と表せる。これは力学平衡 (運動方程式) に対応する式になっており、内側から外側までこの微分方程式を積分す

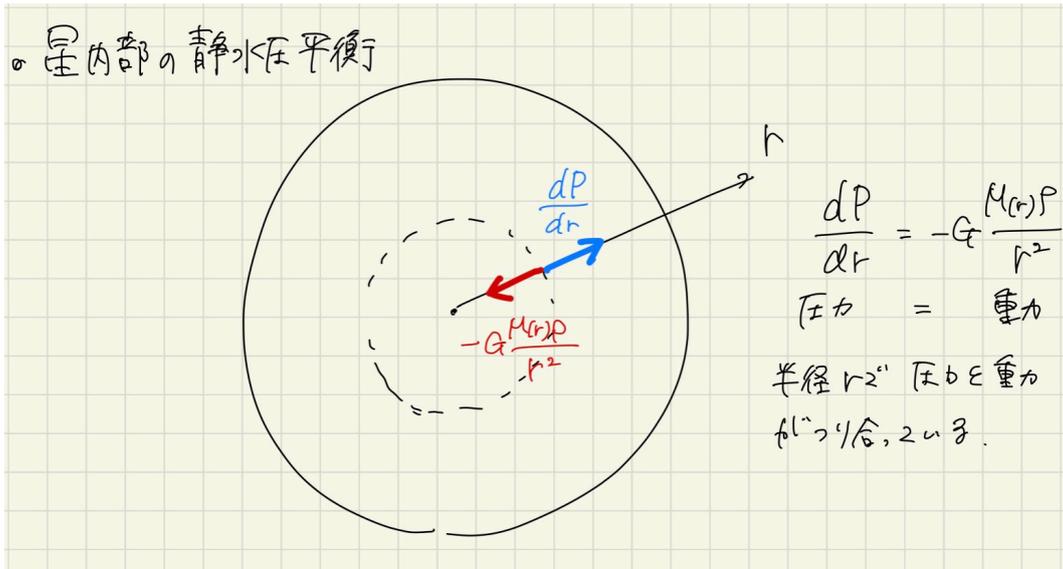


図 10.2: 星の内部での静水圧平衡のイメージ。

ることで、星の内部での力のつり合いを記述できる。星は基本的には、**重力によって内側へ向かおうとする力と、その重力によって生じるエネルギー（熱エネルギー+核融合エネルギー+輻射）で押し返す力がつり合うことで、自身を支えている。**また、質量保存の式として、

$$\frac{dM_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho \quad (10.7)$$

というものが考えられる。

さて、上式のつり合いの式に  $4\pi r^3$  を掛けて星の中心から端まで積分して、質量保存の式も使うと

$$\int_0^R 4\pi r^3 \frac{dP}{dr} dr = - \int_0^R 4\pi G M_r r \rho dr = - \int_0^M \frac{G M_r}{r} dM_r \quad (10.8)$$

を得る。ここで、左辺は部分積分により

$$[4\pi r^3 P]_0^R - 3 \int_0^R 4\pi r^2 P dr \quad (10.9)$$

となるが、星の表面では  $P = 0$  なので第一項は消える。第二項は、圧力  $P$  の体積積分であるが、圧力と内部エネルギー密度  $u$  の間には、比熱比<sup>1</sup>を  $\gamma$  として

$$P = (\gamma - 1)u \quad (10.10)$$

という関係があるので、これを使う。**(補足始)** この関係は熱力学から得られるので、力学から外れてしまうが、理想気体の状態方程式  $PV = Nk_B T$  から考えている。定圧比熱<sup>2</sup> $C_P$  と定積比熱<sup>3</sup> $C_V$  の間には、 $C_P - C_V = Nk_B$  が成り立つので、

$$P = \frac{N}{V} k_B T = \frac{C_P - C_V}{V} T = (c_P - c_V) \rho T = \frac{c_P - c_V}{c_V} \rho u = (\gamma - 1) \rho u \quad (10.11)$$

が得られる。ここで、 $c_P, c_V$  の比熱は単位体積あたりのものを示している。また、 $u \equiv c_V T$  は、内部エネルギー密度（単位体積あたりの内部エネルギー）である。**(補足終)**

この圧力と内部エネルギー密度の関係から、

$$-3 \int_0^R 4\pi r^2 P dr = -3(\gamma - 1)U \quad (10.12)$$

<sup>1</sup>定圧熱容量と定積熱容量の比。断熱圧縮膨張時の圧力  $P$  と体積  $V$  の関係は、 $PV^\gamma = \text{一定}$ 。

<sup>2</sup>圧力一定の条件下で単位量あたりの物質を単位温度変化させるのに必要な熱量。単位量あたりのエンタルピーの変化量の傾きを表す。

<sup>3</sup>体積一定の条件下で単位量あたりの物質を単位温度変化させるのに必要な熱量。単位量あたりの内部エネルギーの変化量の傾きを表す。

となる。ここで  $U$  は星の全内部エネルギーである (これまでの言葉で言えば、系全体の運動エネルギーに近い)。一方、式 (10.8) の右辺は星の重力エネルギー  $\Omega$  (これまでの言葉で言えば、系全体のポテンシャルエネルギー) を表すので、

$$\Omega - 3(\gamma - 1)U = 0 \quad (10.13)$$

という関係式を得る。これが星の内部におけるビリアル定理である。

星の全エネルギーは

$$E = U + \Omega \quad (10.14)$$

なので、この式に得られたビリアル定理を代入すると、

$$E = -(3\gamma - 4)U = \frac{3\gamma - 4}{3(\gamma - 1)}\Omega \quad (10.15)$$

となり、 $\gamma > 4/3$  ならば、星は重力的に束縛されているが、 $\gamma < 4/3$  ならば、重力的に束縛されていないことになる。すなわち、このような星は不安定であることを意味している。

星が高度  $L$  でエネルギーを失っていくことを考えると、

$$\frac{dE}{dt} = -(3\gamma - 4)\frac{dU}{dt} = \frac{3\gamma - 4}{3(\gamma - 1)}\frac{d\Omega}{dt} = -L < 0 \quad (10.16)$$

となるので、

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} &> 0 \\ \frac{d\Omega}{dt} &< 0 \end{aligned} \quad (10.17)$$

となり、エネルギーを失っていくと、内部エネルギーは増加し、重力エネルギーは減少していく (負の方向へ向かう) ことを意味する。重力エネルギーは負であるので、星はより深く束縛されていき、内部エネルギーの増加は温度の上昇を意味する。つまり、**星はエネルギーを失えば失うほど、重力的な束縛が強くなり、温度も上昇する**。そのため「負の比熱」を持っているとも言われる。エネルギーを抜けば冷えるのが普通のように思えるが、星の場合は逆になっている。

内部の力のつり合いを考えず、もう少しシンプルに考えると、重力平衡にあると考えれば、ビリアル定理より、

$$\bar{U} + 2\bar{T} = 0 \Rightarrow \Omega + 2U = 0 \quad (10.18)$$

となるので、

$$E = \Omega + U = -U = \frac{\Omega}{2} < 0 \quad (10.19)$$

という関係も考えられ、同じく負の比熱の考察が可能である。

星の負の比熱は非常に面白い。大質量星の進化の最終段階では、熱核反応で中心領域から大量のニュートリノが放出されエネルギーが引き抜かれ、温度が上昇し進化が加速する。最終的には、中心領域で核融合ができなくなることで中心のエネルギー源がなくなり、自重を支えきれず星が潰れる。これが星の大爆発 (超新星) の原因と考えられており、この時の潰れた中心核がブラックホールや中性子星である。

### 10.3 ビリアル定理によるダークマターの発見

宇宙の研究においては、ビリアル定理を用いて実際に重力多体系の総質量が推定されてきた。そして、そこから現在でも分かっていない多くの謎が生まれてきている。例えば、銀河団などの天体が生まれてから十分時間が経過しており、系が安定な状態に落ち着いていると仮定すると

$$\langle T \rangle \simeq T = \sum_j \frac{1}{2} m_j v_j^2 \quad (10.20)$$

が成り立っていると考える。ここで、銀河団の内部の銀河は、至るところへ向かって飛び交っていて、大気中の気体分子のようなものとイメージすると良い。銀河団を構成する銀河の速度の2乗質量平均(速度分散)

$$\overline{v^2} = \frac{\sum_j m_j v_j^2}{\sum_j m_j} \quad (10.21)$$

と銀河団の総質量  $M = \sum_j m_j$  を用いると、

$$\langle T \rangle = \frac{1}{2} M \overline{v^2} \quad (10.22)$$

のように書き換えられる。一方、系全体の重力ポテンシャルエネルギーは、系の典型的な半径を  $R$  とすれば

$$\langle U \rangle \simeq -\frac{GM^2}{R} \quad (10.23)$$

程度と考えられる。これらの系全体の運動エネルギーとポテンシャルエネルギーから、ビリアル定理を考えると、

$$\begin{aligned} 2\langle T \rangle = -\langle U \rangle &\Rightarrow M \overline{v^2} = \frac{GM^2}{R} \\ &\Rightarrow \overline{v^2} = \frac{GM}{R} \\ &\Rightarrow M_V = \frac{G \overline{v^2}}{R} \end{aligned} \quad (10.24)$$

と変形できる。これはつまり、重力圏に束縛された天体や物質(今でいえば銀河)の典型的な半径  $R$  内の速度を求めれば、その系の質量を見積もることができることを意味する。このように、ビリアル定理を利用して求められる重力多体系の質量をビリアル質量  $M_V$  と呼ぶ。

このビリアル定理自体はとてもシンプルな話に聞こえるが、宇宙の観測結果と比較し始めると、うまく説明できないケースが出てきている。それが一つ目の話題の「**ダークマター(暗黒物質)**」である。宇宙全体において、**通常の物質は約5%しか占めておらず、残りの約27%が暗黒物質、約68%が暗黒エネルギー(ダークエネルギー)である**と考えられている。そして、その残りの95%は何か全く分かっていない。

暗黒エネルギーは宇宙膨張の源として考えられている。一方、暗黒物質は、1933年にフリッツ・ツビッキーが銀河団中の銀河の軌道速度における"欠損質量"(missing mass)を説明するために仮定した未知の物質である。ツビッキーは銀河団を構成する8個の銀河について視線方向の速度を測定し、毎秒1,000 km程度速度分散を持つと結論した。ハッブル=ルメートルの法則に基づくかみのけ座銀河団までの距離の推定値からかみのけ座銀河団の大きさを約1 Mpcと見積もることができる。また、**ビリアル定理によるとこれらの値から銀河団の質量は  $3 \times 10^{14} M_\odot$  と見積もられる ( $M_\odot$  は太陽質量で、約  $2 \times 10^{33}$  g)。驚くことに、これは光で観測できる銀河の質量の総和  $\sim 10^{12} M_\odot$  を大幅に上回っており「質量欠損問題(missing mass problem)」として知られている。**ツビッキーはこのことから目に見えない物質すなわち暗黒物質(独: dunkle Materie)が存在するはずであると推測した(下記、論文からの引用)。

Um, wie beobachtet, einen mittleren Dopplereffekt von 1000 km/sek oder mehr zu erhalten, müsste also die mittlere Dichte im Comasystem mindestens 400 mal grösser sein als die auf Grund von Beobachtungen an leuchtender Materie abgeleitete. Falls sich dies bewahrheiten sollte, würde sich also das überraschende Resultat ergeben, dass dunkle Materie in sehr viel grösserer Dichte vorhanden ist als leuchtende Materie. (観測されたような毎秒1000 kmかそれ以上という中程度のドップラー効果を得るためには、かみのけ座銀河団の平均密度は光っている物質の観測から導かれた値の少なくとも400倍かそれ以上であるはずである。これが証明されれば、光っている物質よりもはるかに多くの暗黒物質が存在するという驚くべき結論が得られる。)

フリッツ・ツビッキー、Helvetica Physica Acta, 6, p. 125 (1933). (Wikipediaより)

同様に、銀河の回転曲線問題と言うものもある(図10.3)。これは、1980年代に明らかになった天文学の問題の一つであり"flat rotation curve problem"などとも呼ばれる。分光観測によって銀河の回転曲線(銀河中心からの半径に対して各位置での回転速度の大きさをプロットした曲線)を求めてみると、その銀河の「目に見える」(電磁波を放射・吸収している)物質分布から想定される回転速度とは大きく異なり、銀河の中心からかなり離れた周縁部でも回転速度が低下せず、平坦な速度分布をしていることが分かる。これは、現在知られている通常の物質

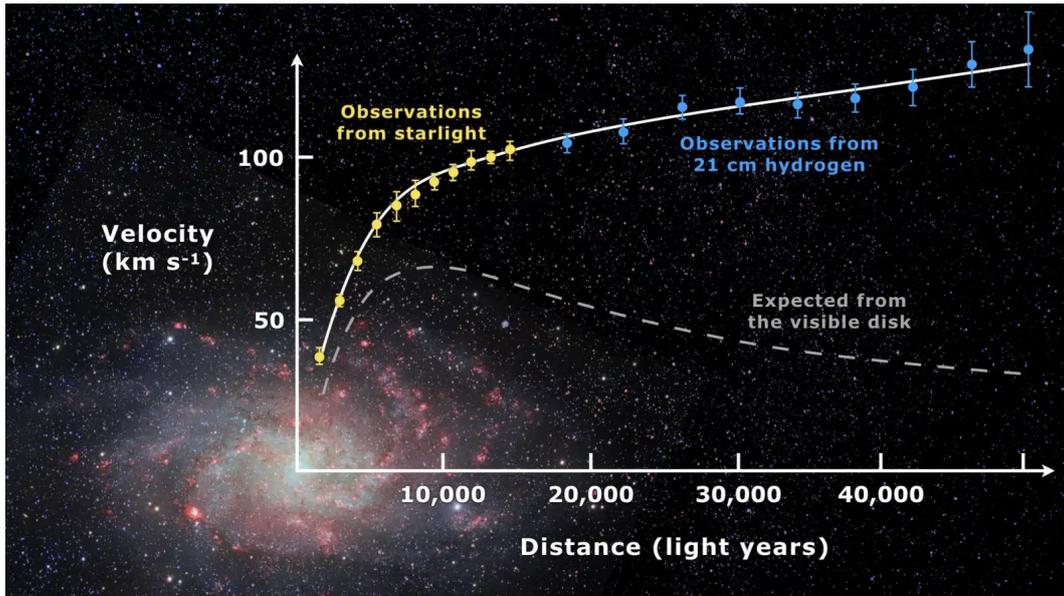


図 10.3: 銀河の回転曲線。

(バリオン)とは異なり、光を出さずに質量エネルギーのみを持つ未知の物質が銀河の質量の大半を占めていると仮定する事で説明される。これも要はビリアル定理的な考え方で、想定した質量では回転速度を説明できないので、未知の物質を考える必要があることの発見と言える。そして、この未知の物質も暗黒物質だと考えられている。一方でこのような暗黒物質を仮定せず、力学の法則を修正することで平坦な銀河回転速度を説明しようとする試みもなされている。

暗黒物質が何であるかは未解決問題で、解明されればノーベル賞確定だろう。どちらかと言うと、暗黒物質が何か問題は、現在では宇宙物理の問題と言うよりは、素粒子物理の問題になってきており、未知の素粒子として多くの人が探している。暗黒物質を説明するような素粒子の候補としては、WIMP、ステライルニュートリノ、アクシオンなど様々だが検証する方法はまだ無い。

大質量ブラックホール周辺の星の動き

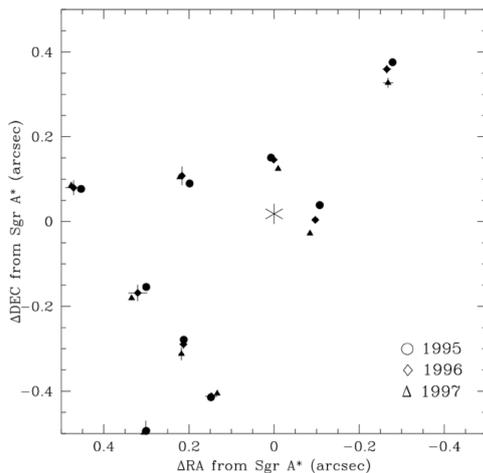


FIG. 3.—Measured positions of stars at 1 arcsec<sup>2</sup> centered on the position of Sgr A\* (starred point, which depicts the location of this radio source). Significant velocities, which reach  $1400 \pm 100 \text{ km s}^{-1}$ , are easily detected in this region. Each year's measurement is represented by a different symbol: 1995 by triangles, 1996 by squares, and 1997 by circles.

ビリアル定理を用いた質量推定

4. CENTRAL DARK MASS

The two-dimensional positions and velocities measured for stars in the inner  $6'' \times 6''$  ( $0.23 \times 0.23 \text{ pc}$ ) provide excellent constraints on the distribution of matter at the center of the Galaxy. In principle, if all six components of the position and velocity vectors could be observed, each star would yield an estimate of the mass enclosed within its radius. With the two-dimensional projections, the individual stars provide only lower limits on the enclosed mass,  $M_{\text{min}}$ , under the assumption that the stars are gravitationally bound, in which case

$$M_{\text{min}} = \frac{v^2 R}{2G}.$$

Every star imposes a minimum mass that exceeds the enclosed mass of luminous matter extrapolated from the power-law relationship derived at larger radii by Genzel et al. (1996). Considering only stars with  $v/\sigma_v \geq 4$ , the minimum enclosed mass estimates reach values of  $(2-3) \times 10^6 M_{\odot}$ , with the apparent members of the Sgr A\* cluster having an  $M_{\text{min}}$  ranging  $(0.2-1) \times 10^6 M_{\odot}$  (see Fig. 6). Thus the stars appear to be moving under the influence of a gravitational potential generated by at least a few million solar masses of dark matter.

図 10.4: 銀河中心の超大質量ブラックホール周辺の星の動き (左) とビリアル定理を用いた質量推定 (右)。Ghez et al., (1998) より引用。

## 10.4 超巨大質量ブラックホールの発見

天の川銀河に代表されるような円盤銀河の中心には、超巨大質量ブラックホール (Super Massive Black Holes, SMBHs) が存在することが種々の銀河観測結果から示唆されている。そして、我々の住む天の川銀河にもそれは当てはまる。観測された力学的構造から、中心から半径 0.01pc より小さな領域に

$$M = (4.3 \pm 0.4) \times 10^6 M_{\odot} \quad (10.25)$$

の大質量天体が存在しなければならないと言われており、これが超巨大質量ブラックホールだと考えられている。**この超巨大質量ブラックホールの発見 (2020 年ノーベル物理学賞) にも、ビリアル定理が用いられている。**

例えば、この超巨大質量ブラックホールの発見でノーベル物理学賞を受賞した Ghez は 1995 年から 2 年間、Keck 望遠鏡で K-band で観測を行い、超巨大質量ブラックホールと考えられている Sgr A\* 周辺にある NSC の星 90 個の固有運動 (二次元平面上での動き) を算出した。この論文 (図 10.4)、**その固有速度の大きさは  $1400 \pm 100$  km/s にもなる**との結果を出している。**その固有運動の分散とビリアル定理**

$$M = \frac{Rv^2}{2G} \quad (10.26)$$

から、GC にある巨大な質量を  $(2.6 \pm 0.2) \times 10^6 M_{\odot}$  と見積もった (図 10.4 右)。この質量が  $10^{-6} \text{ pc}^3$  という狭い領域に存在しなければならないことから、Sgr A\* 領域の質量密度は少なくとも  $10^{12} M_{\odot} \text{ pc}^{-3}$  でなければならないと算出した ( $1 \text{ pc} \sim 3 \times 10^{16} \text{ m}$ )。

### 10.4.1 超巨大質量ブラックホールはどこから来たのか？

基本的に宇宙に存在するブラックホールは、星を潰して作られたと思われている。(未完)

# 第11章 拘束条件とLagrangeの未定乗数法

仮想仕事の原理、ダランベールの原理の章(第3章)で、拘束条件について軽く触れた。今回は、拘束条件が付いた力学変数の系を扱う別の方法として、Lagrangeの未定乗数法を説明する。

## 11.1 拘束条件の復習と独立条件による扱い

以前の仮想仕事の原理・ダランベールの原理の章では、Lagrangian  $L(q, \dot{q}, t)$  が、 $R$  個のホロノミックな拘束条件

$$h_r(q^1, \dots, q^K, t) = 0 \quad (r = 1, 2, \dots, R) \quad (11.1)$$

が付いた  $3N$  個の力学変数  $q$  を用いて与えられている系を考えた。そして、このホロノーム系の場合、拘束力  $F^{(c)i}$  が仕事をしない(滑らかな拘束) 場合に限れば、

$$\sum_i F^{(c)i} \delta q^i = 0 \quad (11.2)$$

となるため、 $3N$  個から  $(3N - R)$  個の自由度へ減らして運動を記述できた事を思い出してもらいたい。この時、拘束力が働く軸は考えずに、よりシンプルな形で運動を記述できたわけだが、**場合によっては拘束力を直接求めたい、あるいはそれを取り込んだ形で解いた方が見通しが良い、ということも起こり得る。**したがって、拘束系を取り扱う一般的な処方箋があると都合がよく、それが **Lagrangeの未定乗数法** である。

## 11.2 Lagrangeの未定乗数法

それでは、Lagrangeの未定乗数法では、どのように拘束条件を扱っていくのかを示していく。ホロノーム系での拘束条件と  $q(t)$  が最小作用の原理を満たすものとする、任意の微小変位  $\delta q(t)$  に対して

$$\delta S = S[q + \delta q] - [q] = \int_{t_1}^{t_2} dt \left( \frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) \delta q^i(t) = 0 \quad (11.3)$$

が要求される。しかし、今の拘束条件がある場合、この式における  $3N$  個の微小変位  $\delta q(t)$  は全てが独立ではないという点に注意する必要がある。すなわち、最小作用の原理を満たす  $q(t)$  と同様に、それから微小にずれた  $q(t) + \delta q(t)$  も拘束条件(11.4)を満たさないとはいけない。つまり、

$$0 = h_r(q(t) + \delta q) = h_r(q) + \frac{\partial h_r(q)}{\partial q^i} \delta q^i + O(\delta q^2) \quad (11.4)$$

となる。加えて、 $h_r(q) = 0$  より、次の  $A$  個の条件式を満足する必要がある。

$$\frac{\partial h_r(q)}{\partial q^i} \delta q^i = 0 \quad (r = 1, \dots, R) \quad (11.5)$$

このような場合、どのように扱えば良いかを具体的に考えていく。

### 11.2.1 二次元座標で一つの拘束条件を持つ場合

まず、一番簡単な例として、二次元座標で拘束条件が一つだけ ( $r = 1$ ) の場合を考えてみる(これまででは、三次元デカルト座標内での  $3N$  個の力学変数を考えていたが、2個の力学変数での場合を考えていることに注意)。力学変数を  $q^i(t)$  の代わりに  $(x(t), y(t))$ 、拘束条件を

$$h(x, y) = 0 \quad (11.6)$$

とする。この場合、作用の変分は

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[ \left( \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \delta x + \left( \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) \delta y \right] = 0 \quad (11.7)$$

となり、拘束条件を満たすためには

$$\frac{\partial h(x, y)}{\partial x} \delta x + \frac{\partial h(x, y)}{\partial y} \delta y = 0 \quad (11.8)$$

である必要がある。この条件を

$$\delta y = - \frac{\partial h}{\partial x} \left( \frac{\partial h}{\partial y} \right)^{-1} \delta x \quad (11.9)$$

と書き換え、作用の変分 (11.7) に代入し、

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \left( \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \lambda \frac{\partial h}{\partial x} \right) \delta x = 0 \quad (11.10)$$

とする。ここで、

$$\lambda(t) = - \left( \frac{\partial h}{\partial y} \right)^{-1} \left( \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) \quad (11.11)$$

で定義した  $\lambda(t)$  を用いている。ここでは、 $\delta x$  しか現れていないので、この式の被積分関数を 0 とすれば良い。また、 $y$  に関しても同様に考えられるため、結果として

$$\begin{aligned} h(x, y) &= 0 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} &= \lambda \frac{\partial h}{\partial x} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} &= \lambda \frac{\partial h}{\partial y} \end{aligned} \quad (11.12)$$

の三つの方程式を解けば良いことになる。これが、二次元座標に置いて、一つの拘束条件を持つときの Lagrange の未定乗数法になっており、新たに導入された変数  $\lambda(t)$  が未定乗数である。この時、

$$\lambda \frac{\partial h}{\partial x} = F^{(c)x}, \quad \lambda \frac{\partial h}{\partial y} = F^{(c)y} \quad (11.13)$$

というように、Lagrange 方程式に新たに加わる項を拘束力として理解できる。

## 11.2.2 一般の場合

より一般に  $3N$  個の座標で  $R$  個の拘束条件を持つ場合は、 $R$  個の未定乗数  $\lambda_r$  を考えて、

$$\begin{aligned} h_r(q^1, \dots, q^K, t) &= 0 \quad (r = 1, 2, \dots, R) \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} &= \lambda_r \frac{\partial h_r(q)}{\partial q^i} \quad (i = 1, 2, \dots, 3N) \end{aligned} \quad (11.14)$$

の方程式を解いて運動が得られる。

## 11.3 Lagrange の未定乗数法を使った具体例

### 11.3.1 斜面を転がる車輪

図 11.1 のように、傾き  $\beta$  の斜面を半径  $a$  で質量  $m$  の車輪 (太さなし) が滑ることなく転がり落ちる過程を、転がった距離  $x(t)$  と角度  $\theta(t)$  を用いて考える。 $x$  は斜面上の固定点 P から車輪と斜面の接点までの距離、 $\theta$  は車輪上の固定点 Q と車輪と斜面の接点の間の角度である。時刻  $t = 0$  に置いて、車輪は停止しており、点 P と点 Q は一致している。 $(x(t), y(t))$  を用いてこの系の Lagrangian は

$$L(x, \theta, \dot{x}, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m a^2 \dot{\theta}^2 + m g x \sin \beta \quad (11.15)$$

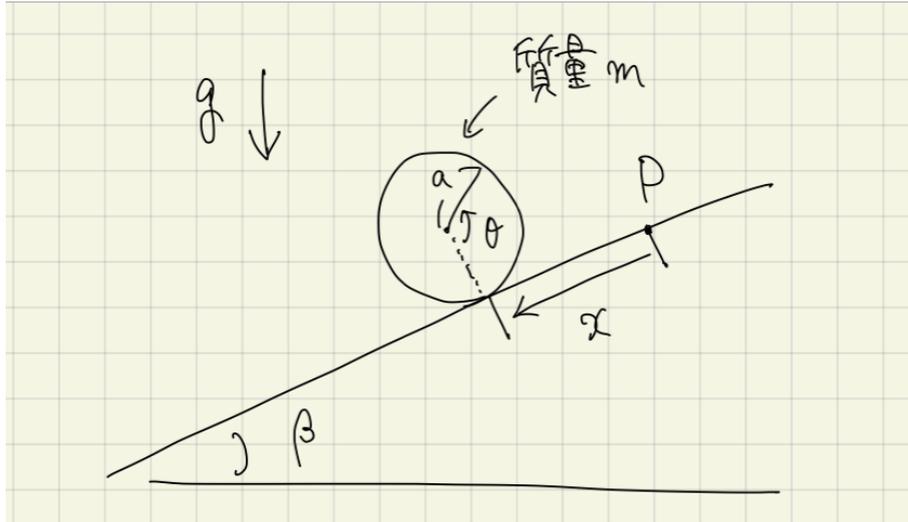


図 11.1: 斜面を転がる車輪。

で与えられる。右辺の最初の二項はそれぞれ車輪の重心運動と回転運動のエネルギーである。また、車輪が斜面を滑らないことを表す次の拘束条件がつく：

$$h(x, \theta) \equiv x - a\theta = 0 \quad (11.16)$$

Lagrange の未定乗数法に従うと、今解くべき方程式は

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} &= \lambda \frac{\partial h}{\partial x} \Rightarrow m\ddot{x} = mg \sin\beta + \lambda \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} &= \lambda \frac{\partial h}{\partial \theta} \Rightarrow ma^2\ddot{\theta} = -a\lambda \end{aligned} \quad (11.17)$$

の二つと上の拘束条件である。これらの二式から  $\lambda$  を消去すると

$$m\ddot{x} + ma\ddot{\theta} = mg \sin\beta \quad (11.18)$$

となり、これに拘束条件から  $a\ddot{\theta} = \ddot{x}$  という関係が出せるので、これを用いて  $x(t)$  のみの

$$2m\ddot{x} = mg \sin\beta \quad (11.19)$$

という方程式を得る。これを初期条件  $x(0) = \dot{x}(0) = 0$  で解き、 $(x(t), \theta(t))$  が

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{4}g \sin\beta t^2 \\ \theta(t) &= \frac{x(t)}{a} \\ &= \frac{g}{4a} \sin\beta t^2 \end{aligned} \quad (11.20)$$

と求まる。次に、未定乗数  $\lambda$  は式 (11.19) と (11.17) の上の式より、

$$\lambda = -\frac{1}{2}mg \sin\beta \quad (11.21)$$

と求まるが、これは斜面からの摩擦力に対応することが分かる。

### 11.3.2 円環の内側を運動する質点

図 11.2 のように、鉛直平面内に置かれた半径  $a$  の輪 (円環) の内面を摩擦無く運動する質点 (質量  $m$ ) を考える。この鉛直平面上の  $(x, y)$  座標を、鉛直上向きに  $y$  軸、水平方向に  $x$  軸、円環の中心を原点  $(0, 0)$  にとる。今、円環

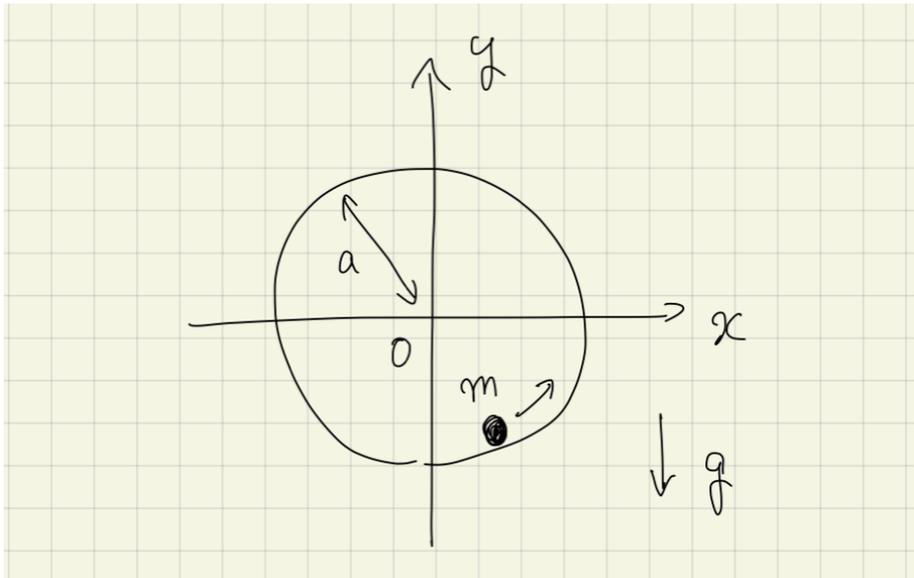


図 11.2: 円環の内側を運動する質点。

の最下点  $(0, -a)$  にある質点に初速度  $(v_0, 0)$  を与えたとし  $(v_0 > 0)$ 、その後、質点が円環の内側から離れることがあるか考察する。また、もし離れるなら、そのときの質点の  $y$  座標を求めてみる。

質点が円環から離れる瞬間までの運動を Lagrange の未定乗数法を用いて考える。拘束条件のついた力学変数として  $(x, y)$  をとると、Lagrangian  $L$  および拘束条件を表す  $h(x, y)$  は

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy \\ h &= x^2 + y^2 - a^2 \end{aligned} \quad (11.22)$$

で与えられる。これらより

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} &= \lambda \frac{\partial h}{\partial x} \Rightarrow m\ddot{x} = 2\lambda x \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} &= \lambda \frac{\partial h}{\partial y} \Rightarrow m\ddot{y} = -mg + 2\lambda y \end{aligned} \quad (11.23)$$

であり、 $(2\lambda x, 2\lambda y)$  が拘束力である。この二式にそれぞれ  $\dot{x}, \dot{y}$  を掛けて足すと

$$\begin{aligned} m(\ddot{x}\dot{x} + \ddot{y}\dot{y}) + mg\dot{y} &= 2\lambda(x\dot{x} + y\dot{y}) \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} \left[ \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgy \right] &= 2\lambda(x\dot{x} + y\dot{y}) = 0 \end{aligned} \quad (11.24)$$

を得る。ここでは、

$$\frac{d}{dt} h(x, y) = 0 \Rightarrow x\dot{x} + y\dot{y} = 0 \quad (11.25)$$

を用いている。また、この式よりエネルギー保存の関係式

$$\frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgy = \frac{m}{2}v_0^2 - mga \quad (11.26)$$

が導かれる。特に、与えられた  $v_0$  に対して質点が到着できる最高点の  $y$  座標  $(= y_{\max})$  は、質点の速度がゼロになる条件から

$$\begin{aligned} mgy_{\max} &= \frac{m}{2}v_0^2 - mga \\ \Rightarrow y_{\max} &= \frac{v_0^2}{2g} - a \end{aligned} \quad (11.27)$$

で得られる。

次に (11.23) のそれぞれに  $x, y$  を掛けて足すと、

$$m(\ddot{x}x + \ddot{y}y) + mgy = 2\lambda(x^2 + y^2) \quad (11.28)$$

ここで、

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - a^2 &= 0 \\ \frac{d^2h}{dt^2} \Rightarrow \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \ddot{x}x + \ddot{y}y &= 0 \end{aligned} \quad (11.29)$$

の拘束条件から得られる二つの関係を使うと、(11.28) から

$$\lambda = \frac{m}{2a^2}(gy - \dot{x}^2 - \dot{y}^2) \quad (11.30)$$

と  $\lambda$  が表せられる。さらに、エネルギー保存の関係式 (11.26) より、

$$\lambda = \frac{m}{2a^2}(3gy + 2ga - v_0^2) \quad (11.31)$$

というように  $y$  の関数として求まる。さて、質点が円環から離れる瞬間、円環から質点に働く抗力、すなわち拘束力がゼロとなる。この点の  $y$  座標を  $y_1$  とすると、 $\lambda = 0$  から

$$y_1 = \frac{v_0^2}{3g} - \frac{2}{3}a \quad (11.32)$$

となる。しかし、 $y = y_1$  で常に質点が円環から離れるわけではない。いくつか、場合分けする必要がある、

1.  $v_0 \leq \sqrt{2ga}$  の場合: 質点は円環から離れない。(  $y_1 > y_{\max}$  なので、質点が円環から離れるところまで達せない )
2.  $\sqrt{2ga} \leq v_0 \leq \sqrt{5ga}$  の場合:  $y = y_1 = a$  で質点から離れる。
3.  $v_0 \geq \sqrt{5ga}$  の場合: 質点は円環から離れない。(回転運動)

というように考察できる。

## 第12章 Hamilton の正準方程式と Legendre 変換

これまでの講義では、座標  $q$  とその時間微分  $\dot{q}$  を力学変数とする Lagrangian  $L(q, \dot{q}, t)$  と Lagrange 方程式を基礎とした解析力学を学んできた。少し思い出してみると、もともと Lagrangian の時点では、 $q, \dot{q}$  は独立した変数として導入されたが、得られる運動方程式では、一般座標の二階微分方程式である。結局は、一般座標  $q$  の時間微分として  $\dot{q}$  が決定されるため、独立と扱っていたものの結局は一般座標に帰結する。これは一般座標が特別な存在になっていると考えても良い。

座標と速度の時間発展を決定すれば運動方程式が決まる。これが Lagrange 形式のスタート地点だと思いが、座標と速度では対等ではなく不公平なので、何か座標と同等な存在の物理量と速度とを置き換えて力学を再定式化できないか、という視点がこれから学ぶ Hamilton 形式のスタート地点だと考えてもらいたい。

基本的には、Lagrange 形式と Hamilton 形式は等価である。しかしながら、Lagrange 形式では座標の間だけに保証されていた座標変換 (点変換) が、運動量 (これが座標と同等な存在の物理量) を含むものまで拡張され、それが正準変換である。それを通じて、物理法則の記述法の普遍性がより深いレベルで理解できる。また、Hamiltonian はエネルギーという運動の積分に直接対応した物理量になっており、量子力学や統計力学での登場頻度が多い。一方で、Lagrange 形式が劣っているかというそうではなく、場を使った議論 (重力場や電磁場) には Lagrange 形式がよく使われている。

### 12.1 共役運動量

「共役」というのは、表裏一体のようなイメージで、ある関係にある二つのものが、入れ替えてもその関係に変化が起らないような状態を意味する。そして今、一般座標と共役なものを探し、それを用いて力学を再定式化できないかと考えている。ここで唐突であるが、座標のとり方に依存しない物理量 (空間の並進対称性) は何であったかを思い出してみると、

$$\frac{\partial L}{\partial q^k} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} = \frac{d}{dt} p^k = 0 \quad (12.1)$$

というように、一般運動量  $\partial L / \partial \dot{q}^k \equiv p^k$  であった。実は、この一般運動量が一般座標にとって共役なものになる。そのため「共役運動量」とも呼ばれる。この一般運動量は、単に  $mv$  のように、質量に速度を掛けたものだけではなく、極座標での角度方向では角運動量になるし、電荷  $q$  を持つ粒子の場合は  $mv + qA/c$  となる。そのため、あくまでも“一般”運動量が一般座標に対して共役であることに注意してほしい。そして、Hamilton 形式では、新しく一般座標と一般運動量  $(q, p)$  を変数 (正準変数と呼ぶ) に持つ Hamiltonian が定義され、そこから運動が導かれる。

ところで、空間の並進対称性、回転対称性から導かれる運動量、角運動量がどちらも一般座標に対する共変運動量として考えられたことを考えると、時間の並進対称性によって保存するとわかるエネルギーも、時間と共役な関係にあると言えるだろうか? これは、実際そのようなもので、次章の正準変換と Hamilton-Jacobi 理論を通して、時間とエネルギーも正準変数となりうるということが分かる。

### 12.2 Hamilton の正準方程式

まず、いきなりだが Hamilton 方程式 (または正準方程式とも言う) というものの形を実際に見てみると、

$$\begin{cases} \frac{dq^k}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p^k} \\ \frac{dp^k}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^k} \end{cases} \quad (12.2)$$

となっており、これが Hamilton 形式において力学系の発展を記述する基礎方程式である。Lagrange 形式と比べると、方程式が二つ出てきて戸惑うかもしれないが、実際に手を動かしてみると、Lagrange 形式と等価であることが分かってくる。例えば、一番シンプルな Lagrangian  $L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - mgx$  を考えてみると

$$\begin{aligned} H(x, p) &= p\dot{x} - L \\ &= m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + mgx \\ &= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + mgx \\ &= \frac{p^2}{2m} + mgx \end{aligned} \tag{12.3}$$

というように、座標  $x$  と運動量  $p$  の関数として Hamiltonian が決定される。この Lagrangian から Hamiltonian への変換を Legendre 変換と呼び、この章の後半でもう少し詳しく説明する。さて、この Hamiltonian を正準方程式に入れてあげると、

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{p}{m} \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{m} \frac{dp}{dt} \\ \frac{dp}{dt} = -mg \end{cases} \tag{12.4}$$

が得られ、上式右と下の式から  $dp/dt$  を消せば、

$$\left\{ m \frac{d^2x}{dt^2} = -mg \right. \tag{12.5}$$

となり、運動方程式が得られる。

これら二つの正準方程式は、Lagrange 方程式と同様に変分原理から導かれる。作用積分は、Hamiltonian を用いると、

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2} [p\dot{q} - H(p, q)] dt \tag{12.6}$$

と書き直せる。ここで、 $p$  と  $q$  に対して独立な変分をとれば、

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left( \delta p \dot{q} + p \frac{d}{dt} \delta q - \frac{\partial H}{\partial p} \delta p - \frac{\partial H}{\partial q} \delta q \right) dt \tag{12.7}$$

となる。この式の前半部は  $p\dot{q}$  という関数の、 $p, q$  方向それぞれの変化分と理解すると良い。そして、この第二項を部分積分すれば、

$$\delta S = [p\delta q]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left[ \left( \dot{q} - \frac{\partial H}{\partial p} \right) \delta p - \left( \dot{p} + \frac{\partial H}{\partial q} \right) \delta q \right] dt \tag{12.8}$$

が得られ、第一項は境界条件で消え、第二項では  $\delta p$  と  $\delta q$  を独立な変分と見做しているから、 $\delta S = 0$  とすれば、二つの正準方程式が得られる。

### 12.3 Legendre 変換と Lagrangian の凸性

Hamiltonian と Lagrangian は、力学系を記述する独立変数の選び方の自由度に関係した異なる表現であり、互いに対等な関係にある。そしてこれらは Legendre 変換で結びついている。Legendre 変換は熱力学でも頻繁に登場するので、どのようなものかここで具体的に説明したい。

図 12.1 に示すのが、Legendre 変換のイメージで、全く難しい事はしておらず「ある関数は、傾きと切片の集合として置き換え可能」ですよねという話である。この視点で、もう一度 Hamiltonian と Lagrangian の関係を見てみると、

$$\begin{aligned} H &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q} - L \\ \Rightarrow L &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q} - H \end{aligned} \tag{12.9}$$

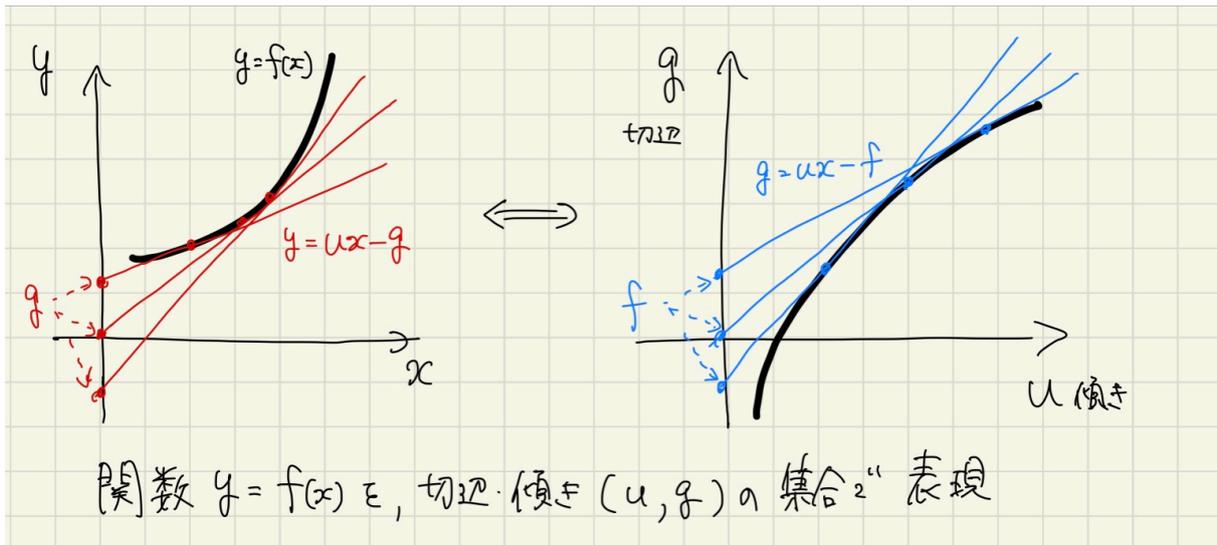


図 12.1: Legendre 変換の幾何学的イメージ。

となっている。 $\dot{q}$  の関数だった Lagrangian に接線を引いていって、その傾き  $\partial L / \partial \dot{q} \equiv p$  と切片  $H$  (Hamiltonian) で表現し直せますという事である (図中の関数に置き換えれば、 $x$  の関数だった  $f(x)$  に接線を引いていって、その傾き  $df/dx \equiv u$  と切片  $g$  で表現し直せる)。つまり、Legendre 変換の視点から見れば、置き換えたかった  $\dot{q}$  の相手を見つけるためには、その  $\dot{q}$  方向の変化に関する Lagrangian の傾きである一般運動量を考えればよかったと言える。

図 12.1 に対応させながら、少し一般的な話をする。2 つの変数  $x, y$  の関数  $f = f(x, y)$  の全微分を考え、

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \equiv u dx + v dy \quad (12.10)$$

とする。ここで、 $x$  のかわりに  $u \equiv \partial f / \partial x$  を用いて、2 変数関数

$$g(u, y) = xu - f(x, y) = x \frac{\partial f}{\partial x} - f(x, y) \quad (12.11)$$

というものが考えられ、これが、Legendre 変換である。ある関数を傾きと切片  $(u, g)$  の集合で表現し直している事になる。ここで、 $x \rightarrow \dot{q}$ 、 $y \rightarrow q$ 、 $f(x, y) \rightarrow L(q, \dot{q})$ 、 $u = \partial f / \partial x \rightarrow p = \partial L / \partial \dot{q}$ 、 $g(u, y) \rightarrow H(p, q)$  と置き換えると、Hamiltonian と Lagrangian の関係に結びつけられるだろう。また、変換後でも、

$$x = \frac{\partial g}{\partial u} \Rightarrow \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \quad (12.12)$$

とすれば変換前の変数 (Hamiltonian への変換の場合は一般速度) を復元できる。これらのことから、Lagrangian と Hamiltonian が互いに Legendre 変換の関係にあることが理解できる。

一方で、Lagrangian から Hamiltonian (またはその逆) の変換の際に元の情報を完全に復元するためには、Lagrangian が凸関数である必要がある。例えば、図 12.2 に示すように、関数が凸性を示さない場合に、切片と傾きの集合でその関数を表現しようとすると、同じ傾きになる点が複数存在してしまう。この場合、例えば Lagrangian と Hamiltonian の関係で考えれば、一意に一般運動量と Hamiltonian を関係づけることができなくなる。そのため、Lagrangian には

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2} > 0 \quad \text{あるいは} \quad \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2} < 0 \quad (12.13)$$

のいずれかが常に成り立っている必要がある。幾何学的に考えれば、これらの条件はそれぞれ Lagrangian が常に下に凸の関数あるいは上に凸の関数であるという意味に他ならない。

最もシンプルな例を考えれば、運動エネルギーは  $T = (1/2)mv^2$  なので、座標の時間微分の二次式になっている。そのため、このような通常の運動エネルギーを考える場合、速度で二階微分したものは常に正の値を示すため、下に凸な関数になることが分かる。つまり、運動エネルギーが速度の二次式で与えられている場合は、Lagrangian と Hamiltonian の間の変換は自由にできる。(最短経路問題でも、微分量の二次式が出てきたことを思い出して欲しい)

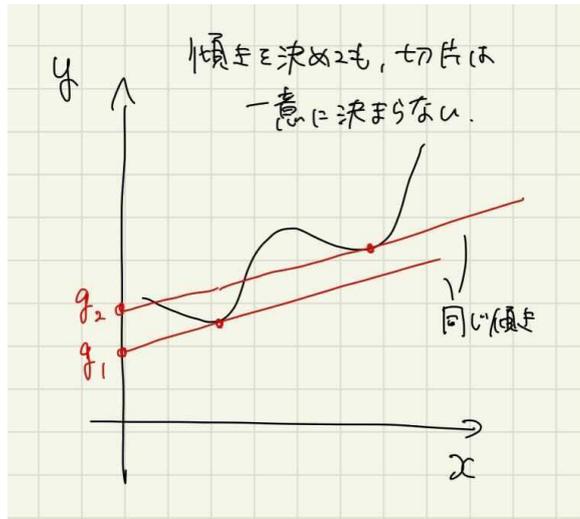


図 12.2: 関数が凸ではない場合。

## 12.4 位相空間

$N$  自由度の力学系を考えて、その力学変数  $q^i$  と運動量  $p^i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) で張られる  $2N$  次元空間  $(q^i, p^i)$  のことを位相空間と呼ぶ。これに対して、座標  $q^i$  がはる  $N$  次元空間 (実際に物体が運動する空間) のことを配位空間と呼ぶ。Hamilton 形式の利点として、この位相空間での運動の軌跡が、エネルギーや運動量などといった保存量 (運動の積分) を決めると一意に決まるという点がある。

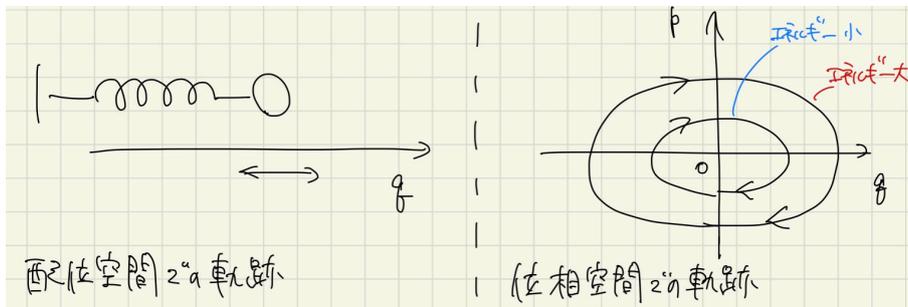


図 12.3: 配位空間と位相空間でのバネについての質点の運動の軌跡の違い。

例えば、質量  $m$  の粒子がバネ定数  $k$  に対応するポテンシャルのもとで運動している一次元調和振動子の場合、配位空間ではある直線上を前後するだけの軌跡になる。一方で位相空間の場合は、Hamiltonian は

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kq^2 \quad (12.14)$$

なので、エネルギーが一定となる ( $H = E$ ) 軌跡は位相空間  $(q, p)$  上では楕円となる。そして、エネルギーが異なる場合は、この楕円の面積も異なる。また、運動量一定で等速直線運動している場合は、位相空間では直線になる。このように、位相空間での軌跡が保存量と密接に関係していることが分かる。

少し異なる視点から考えると、Hamilton 形式において運動を決定する際は、初期座標と初期運動量という二つの定数を同時に決める必要がないと言える。運動の軌跡を決定するだけであれば、保存量から分かるし、そもそも異なる力学変数を準備しても良い。このような性質が、次章の正準変換と Hamilton-Jacobi 理論へ繋がる。

## 第13章 正準変換と Hamilton-Jacobi 理論

「何か座標と同等な存在の物理量と速度とを置き換えて力学を再定式化できないか？」という問いが、前章での Hamilton 形式へ導入であったことを思い出してもらいたい。そして、一般座標の相方として選ばれた物理量が一般運動量 (共変運動量) である。これまで我々は、運動量といえば (質量)×(速度) だと教わってきたこともあり、別の二つの物理量を掛け合わせたものが、座標と対等な立場になることに違和感を覚えるかもしれない。一方で、運動を考える上ではこの運動量の方が本質的であり、これから行う座標と運動量をごちゃ混ぜにした変換「正準変換」をとおして、座標と運動量の区別は実質的に無意味であることが分かってくる。そして、座標と運動量をごちゃ混ぜにしても良いのであれば、何でも都合の良い物理量を変数として作れそうに思わないだろうか？全くその通りで、運動を解くにあたって都合の良い新しい変数を正準変換で作りに出してしまう。例えば、時間変化しない保存量を Hamiltonian の新しい変数として設定することもでき、実はその変数探しの過程自体が運動を解くことと等価である。それが、最後に行う「Hamilton-Jacobi 理論」である。

### 13.1 正準変換

Lagrange 方程式は、任意の座標変換 (点変換) の下で共変であった。例えば、

$$Q^k = Q^k(q^1, \dots, q^K, t) \quad (k = 1, \dots, K) \quad (13.1)$$

という変換を考えたとき、

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial q^k} = 0 \quad (13.2)$$

が成り立てば、

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L(Q, \dot{Q}, t)}{\partial \dot{Q}^k} - \frac{\partial L(Q, \dot{Q}, t)}{\partial Q^k} = 0 \quad (13.3)$$

も成立したことを思い出して欲しい。

一方で、これから扱う正準変換は、座標同士の変換に留まらず、座標と運動量をごちゃ混ぜにした変換を考えている。言い換えれば、

$$\begin{cases} P^k = P^k(p, q, t) \\ Q^k = Q^k(p, q, t) \end{cases} \quad (13.4)$$

という変換を考えたとき、ある新しい Hamiltonian  $H'(P, Q)$  が存在し、これが

$$\begin{cases} \frac{dQ^k}{dt} = \frac{\partial H'}{\partial P^k} \\ \frac{dP^k}{dt} = -\frac{\partial H'}{\partial Q^k} \end{cases} \quad (13.5)$$

というように Hamilton 方程式の形を変えずに済むかという事を考えてみる。そして、この上式を満たす変換のことを「正準変換」と呼ぶ。

一般的な正準変換を見る前に、具体的な例をいくつか示す。

#### 定数倍変換

任意の系において、 $a$  を任意実定数として、

$$Q = aq, \quad P = \frac{1}{a}p \quad (13.6)$$

は正準変換である。この時、新 Hamiltonian は、

$$H'(Q, P, t) = H(q, p, t) = H\left(\frac{1}{a}Q, aP, t\right) \quad (13.7)$$

となる。位相空間での面積が変化しないように、 $q$  にかかる係数の逆数が  $p$  にかかる。

### $q$ と $p$ の交換

任意の系において、 $q$  と  $p$  の交換

$$Q = p, \quad P = -q \quad (13.8)$$

は正準変換である。この時、新 Hamiltonian は、

$$H'(Q, P, t) = H(q, p, t) = H(-P, Q, t) \quad (13.9)$$

となる。ここで、座標と運動量の単純な交換  $(Q, P) = (q, p)$  は正準変換ではない (正準方程式にマイナスが入っている)。どちらかに、マイナス符号をつける必要がある。

それでは、 $(p, q)$  から  $(P, Q)$  への変換が正準変換となるための条件は、どのようなものだろうか？ それについて調べるには、もう一度変分原理に立ちかえるのがわかりやすい。今回の場合で変分原理を考えれば、 $(p, q)$  と  $(P, Q)$  の力学変数が同時に

$$\delta \int [p\dot{q} - H(p, q, t)] dt = \delta \int [P\dot{Q} - H'(P, Q, t)] dt = 0 \quad (13.10)$$

を満たす必要がある。ここで、Lagrangian の任意性のところで出てきた

$$L' = L + \frac{dW}{dt} \quad (13.11)$$

というものを思い出してもらいたい。Lagrangian の任意性の議論の際は、 $q, t$  の任意の関数  $W(q, t)$  の時間微分をある Lagrangian に足したとしても、得られる運動方程式は変わらないという話だった。この性質を使えば、 $(p, q)$  から  $(P, Q)$  への変換の時に出てしまう差分を任意の関数に押し込めることが出来そうだ。ということで、

$$p\dot{q} - H(p, q, t) = P\dot{Q} - H'(P, Q, t) + \frac{dF}{dt} \quad (13.12)$$

と恒等的に成り立つような関数  $F$  が存在すれば良いことが分かる。この  $F$  を正準変換の母関数 (generating function) と呼ぶ。この関数  $F$  の全微分を考えると、

$$dF = pdq - PdQ + [H'(P, Q, t) - H(p, q, t)]dt \quad (13.13)$$

となる。この時、関数  $F$  が  $q$  と  $Q$  に関する全微分の形である事に着目すると、 $F = F(q, Q, t)$  であると考えられる。一般には、母関数  $F$  は、新旧変数を結ぶものなので  $(q, p, Q, P)$  の 4 つの変数を持つ可能性があり、そのうち二つが独立になる。まず、上記の母関数の場合を  $F_1$  として、その変換を見てみる。まず、 $F_1 = F_1(q, Q, t)$  なので、その時間微分は、

$$\frac{d}{dt}F_1(q, Q, t) = \frac{\partial F_1}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial F_1}{\partial Q}\dot{Q} + \frac{\partial F_1}{\partial t} \quad (13.14)$$

となるので、この式を (13.12) に代入すると

$$\left(p - \frac{\partial F_1}{\partial q}\right)\dot{q} + \left(P + \frac{\partial F_1}{\partial Q}\right)\dot{Q} + H' - H + \frac{\partial F_1}{\partial t} = 0 \quad (13.15)$$

となり、これが任意の  $(\dot{q}, \dot{Q})$  に対して成り立つべきことから、母関数  $F_1(q, Q, t)$  による正準変換は、

$$p = \frac{\partial F_1(q, Q, t)}{\partial q}, \quad P = -\frac{\partial F_1(q, Q, t)}{\partial Q}, \quad H' = H + \frac{\partial F_1(q, Q, t)}{\partial t} \quad (13.16)$$

という関係式が得られる。例えば、 $F_1$  の具体例の一つが、上で紹介した交換変換で、

$$F_1(q, Q) = qQ \quad (13.17)$$

という母関数を定義すれば、正準変換の関係式から、

$$p = \frac{\partial F_1}{\partial q} = Q, \quad \frac{\partial F_1}{\partial Q} = -q \quad (13.18)$$

というように、交換変換が得られる。

今、 $F_1(q, Q, t)$  という母関数を考えたが、これだけでは全ての正準変換を表現できない。とりあえず、 $F_1(q, Q, t)$ ,  $F_2(q, P, t)$ ,  $F_3(p, Q, t)$ ,  $F_4(p, P, t)$  という 4 つの母関数が考えられ、それぞれの正準変換をまとめてみると、

$$F_1(q, Q, t)$$

$$p = \frac{\partial F_1}{\partial q}, \quad P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q}, \quad H' = H + \frac{\partial F_1}{\partial t} \quad (13.19)$$

$$F_2(q, P, t) = F_1(q, Q, t) + PQ$$

$$p = \frac{\partial F_2}{\partial q}, \quad Q = -\frac{\partial F_2}{\partial P}, \quad H' = H + \frac{\partial F_2}{\partial t} \quad (13.20)$$

$$F_3(p, Q, t) = F_1(q, Q, t) - pq$$

$$q = \frac{\partial F_3}{\partial p}, \quad P = -\frac{\partial F_3}{\partial Q}, \quad H' = H + \frac{\partial F_3}{\partial t} \quad (13.21)$$

$$F_4(p, P, t) = F_1(q, Q, t) - pq + PQ$$

$$q = \frac{\partial F_4}{\partial p}, \quad Q = -\frac{\partial F_4}{\partial P}, \quad H' = H + \frac{\partial F_4}{\partial t} \quad (13.22)$$

という関係がある。これらは、 $F_1(q, Q, t)$  との関係式が示すように、 $F_1(q, Q, t)$  の Legendre 変換として与えられる。

例えば、点変換は  $F_2$  や  $F_3$  で表現することができ、 $F_2(q, P) = f(q)P$  とすると

$$Q = \frac{\partial F_2}{\partial P} = f(q), \quad p = \frac{\partial F_2}{\partial q} = \frac{\partial f}{\partial q} P \quad (13.23)$$

となるし、 $F_3(p, Q) = -g(Q)p$  とすれば、

$$q = -\frac{\partial F_3}{\partial p} = g(Q), \quad P = -\frac{\partial F_3}{\partial Q} = \frac{\partial g}{\partial Q} p \quad (13.24)$$

となり、いずれも通常座標変換 (点変換) に対応し、それらが正準変換であることを示している。

## 13.2 Hamilton-Jacobi 方程式

正準変換ができることの利点として  $(q, p)$  をごちゃ混ぜにして、問題をより簡単にできるという点が挙げられる。 $(q, p)$  から  $(Q, P)$  への正準変換を考える時に、無数に変換を考えることができるが、例えば、変換後の Hamiltonian が恒等的に  $H' = 0$  となるような変換を見つけられた時、

$$\begin{cases} \frac{dQ^k}{dt} = \frac{\partial H'}{\partial P^k} = 0 \\ \frac{dP^k}{dt} = -\frac{\partial H'}{\partial Q^k} = 0 \end{cases} \quad (13.25)$$

となり、これはつまり

$$\begin{cases} Q^k = \text{一定} \\ P^k = \text{一定} \end{cases} \quad (13.26)$$

なので、新しい力学変数  $(Q, P)$  が運動の積分になることがわかる。元の力学変数  $(q, p)$  は、新しい力学変数  $(Q, P)$  で表現できるので、前者の運動方程式の解も得られ、その力学系の運動が完全に解けたことになる。つまり、 $H' = 0$  となるような正準変換を見つけることは (実際に可能かは別の話だが)、力学系の運動を解くことと等価である。これは、言い換えると座標と運動量を組み合わせて保存量を作り、それが正準変数になっていれば良い。

このような変換を考える際、 $F_2$  タイプの母関数を考えてみると、 $H' = 0$  となる条件は、

$$\frac{\partial F_2(q, P, t)}{\partial t} + H\left(q^1, \dots, q^K, \frac{\partial F_2}{\partial q^1}, \dots, \frac{\partial F_2}{\partial q^K}, t\right) = 0 \quad (13.27)$$

と書ける。この式の解となる  $F_2(q, P, t)$  は、Hamilton の主関数と呼ばれ、 $S$  と書かれることが多いので、通常は

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t\right) = 0 \quad (13.28)$$

と書き、Hamilton-Jacobi 方程式と呼ぶ。要は、この方程式を解くと  $H' = 0$  となる正準変換を見つけることができ、その際、 $(q, p)$  をごちゃ混ぜにした変換で何かの保存量を新たな力学変数として見つけている事になる。

この Hamilton-Jacobi 方程式は、 $(q^1, \dots, q^K, t)$  の  $(K+1)$  個の変数を持つ未知の関数  $S$  に対する一階偏微分方程式になっている。したがって、その解は

$$S = \tilde{S}(q^1, \dots, q^K, t, \alpha^1, \dots, \alpha^K) + \alpha^0 \quad (13.29)$$

のように  $\alpha^0, \alpha^1, \dots, \alpha^K$  の  $(K+1)$  個の積分定数を持つ。

今の場合  $(P, Q)$  はいずれも定数なので、 $S = S(q, P, t)$  を特に  $\alpha^1, \dots, \alpha^K$  の  $K$  個の積分定数が新たな運動量  $P^k$  となるような正準変換の母関数  $S(q, \alpha, t)$  であると考え。さらに、 $Q^k$  が定数であることを明示的に示すため  $\beta^k$  と書き直すこととすれば、

$$p^k = \frac{\partial S(q, \alpha, t)}{\partial q^k}, \quad \beta^k (= Q^k) = \frac{\partial S(q, \alpha, t)}{\partial \alpha^k} \quad (13.30)$$

と書き換えることができる。この式は、 $q$  と  $p$  に対する代数方程式なので、原理的にはそれらを連立して解いて  $q = q(\alpha, \beta, t), p = p(\alpha, \beta, t)$  が得られる。

### 最も簡単な例

この Hamilton-Jacobi 方程式を満たす母関数  $S$  に関して、少し具体的な例をあげて考えてみる。一次元の Hamiltonian が、

$$H = \frac{p^2}{2m} + U(x) \quad (13.31)$$

で与えられている場合を考える。この Hamilton-Jacobi 方程式

$$\frac{\partial S(x, t)}{\partial t} + H\left(x, \frac{\partial S}{\partial x}, t\right) = 0 \quad (13.32)$$

を解いて具体的に  $S$  を求めてみる。まず、この母関数の時間微分で、恒等的に今の Hamiltonian を 0 にするためには、エネルギー保存則が成り立っている場合  $H = E$  なので、

$$\frac{\partial S(x, t)}{\partial t} = -E \quad (13.33)$$

となる必要がある。また、正準変換の関係と  $p$  の定義から、

$$\begin{aligned} \frac{\partial S(x, t)}{\partial x} &= p \\ &= \sqrt{2m[E - U(x)]} \end{aligned} \quad (13.34)$$

となるので、上式と合わせて

$$S(x, t) = -Et + \int dx \sqrt{2m[E - U(x)]} \quad (13.35)$$

を得る。特に自由粒子の場合は、

$$S(x, t) = -Et + \int dx \sqrt{2m[E]} = -Et + px \quad (13.36)$$

となる。これは、古典力学の Hamilton-Jacobi 方程式から量子力学のシュレーディンガー方程式へ至る考察において重要な関係式である。そして、座標と運動量というそれぞれ共役な関係だったものと同じように、時間とエネルギーが共役な存在として選ばれている様子が分かるだろう。

### 13.2.1 平面上の中心力ポテンシャル下の質点 (二次元ケプラー問題)

中心力ポテンシャル  $U(r)$  のもと、平面上を運動する質点を考える。極座標表示で Hamiltonian は、

$$H = \frac{1}{2m} \left( p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} \right) + U(r) \quad (13.37)$$

となる。この系に対する正準変換  $(r, \theta, p_r, p_\theta) \rightarrow (Q_1, Q_2, P_1, P_2)$  によって、新たな Hamiltonian を 0 にする母関数  $S(r, \theta, P_1, P_2, t)$  を求めることを考える。ここで  $U(r)$  を重力ポテンシャルとすれば、二次元面上でのケプラー問題になる。この時、母関数は

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} \left[ \left( \frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial S}{\partial \theta} \right)^2 \right] + U(r) = 0 \quad (13.38)$$

の Hamilton-Jacobi 方程式を満たす。この式を解くために、

$$S(r, \theta, t) = S_r(r) + S_\theta(\theta) + S_t(t) \quad (13.39)$$

と変数分離できるものと仮定して代入すると

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H = \frac{dS_t}{dt} + \frac{1}{2m} \left[ \left( \frac{\partial S_r}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial S_\theta}{\partial \theta} \right)^2 \right] + U(r) = 0 \quad (13.40)$$

が得られる。ここで、 $\alpha_1$  と  $\alpha_2$  を定数として、

$$\frac{dS_t}{dt} = -\alpha_1, \quad \frac{dS_\theta}{d\theta} = -\alpha_2 \quad (13.41)$$

と置くと、

$$\begin{aligned} -\alpha_1 + \frac{1}{2m} \left[ \left( \frac{\partial S_r}{\partial r} \right)^2 + \frac{\alpha_2^2}{r^2} \right] + U(r) &= 0 \\ \Rightarrow \frac{\partial S_r}{\partial r} &= \sqrt{2m(\alpha_1 - U(r)) - \frac{\alpha_2^2}{r^2}} \end{aligned} \quad (13.42)$$

の三つの関係式を作ることができる。これを積分すれば、

$$S = -\alpha_1 t + \alpha_2 \theta + \int \sqrt{2m(\alpha_1 - U(r)) - \frac{\alpha_2^2}{r^2}} dr \quad (13.43)$$

となる。ここで、この  $\alpha_1$  と  $\alpha_2$  を新たな運動量とするような正準変換を考えれば、

$$P_1 = \alpha_1, \quad P_2 = \alpha_2, \quad Q_1 = \frac{\partial S}{\partial \alpha_1}, \quad Q_2 = \frac{\partial S}{\partial \alpha_2} \quad (13.44)$$

となる。この時、 $\alpha_1, \alpha_2$  は運動の定数 (保存量) として選ばれているはずで、実際の関数形は

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -\frac{\partial S}{\partial t} = H = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + U(r) \\ \alpha_2 &= \frac{\partial S}{\partial \theta} = p_\theta = m r^2 \dot{\theta} \end{aligned} \quad (13.45)$$

となるので、Hamilton-Jacobi 方程式を解くことで、平面上の中心力ポテンシャル下の運動方程式が導かれる。そして、新たな運動量 (正準運動量)  $P_1, P_2$  として、エネルギーと角運動量の二つの保存量が選ばれていることになる。

それでは、これらに対応する新たな座標 (正準座標)  $Q_1, Q_2$  も考えてみる。まず、 $Q_1$  は

$$Q_1 = \frac{\partial S}{\partial \alpha_1} = -t + \int \frac{m dr}{\sqrt{2m(\alpha_1 - U(r)) - \alpha_2^2/r^2}} \quad (13.46)$$

となって、時間  $t$  に対応する変数になっている (ケプラー問題では近点通過時刻に対応)。同様に  $Q_2$  は

$$Q_2 = \frac{\partial S}{\partial \alpha_2} = \theta - \frac{\alpha_2}{m} \int \frac{m dr}{r^2 \sqrt{2m(\alpha_1 - U(r)) - \alpha_2^2/r^2}} \quad (13.47)$$

となり、角度  $\theta$  に対応する変数になる (ケプラー問題では近点引数に対応)。このようにして、Hamilton-Jacobi 方程式を解き、新たな正準変数  $(Q_1, Q_2, P_1, P_2)$  = (時間, 角度, エネルギー, 角運動量) を選ぶと、Hamiltonian は恒等的に 0 になり、これらの量は全て運動の積分 (保存量) であることが分かる。

## 第14章 (おまけ) ポアソン括弧

(未完)

## 第15章 (おまけ) シンプレクティック条件とリウヴィルの定理

(未完)

## 第16章 (おまけ) オストログラドスキーの定理

オストログラドスキーの定理とは、力学変数の高階微分を運動方程式に含む物理系のハミルトニアンが下に非有界となることを述べる定理である。簡単に言えば、Lagrangian は  $\ddot{q}$  以上の高階微分の力学変数を含まない、という約束の定理である。1850年にミハイル・オストログラドスキーにより証明された(証明論文は約130ページほどあるそうなので、試さない方がよい)。この定理は、運動方程式に高階微分項が含まれる系には一定の条件を満足する場合を除き物理的に不安定なモードが存在するため、そのような系は物理的ではないことを示している。

### 16.1 $\ddot{q}$ を含む Lagrange 方程式

これまで、Lagrangian は  $L(q, \dot{q})$  として、座標とその時間の一階微分の二つの変数の関数として考えてきた。その際、変分  $\delta S$  は、

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) dt \quad (16.1)$$

というように、 $q, \dot{q}$  の二変数についての変化量を調べれば良かった。ここをスタートとして Lagrange 方程式を導いたため、 $\ddot{q}$  やそれより高階微分の成分が増えていった場合は、Lagrange 方程式が異なる形になることは想像できるだろう。まずは、そのような Lagrange 方程式が物理的に意味のあるものかは置いておき、 $\ddot{q}$  を変数にもつ Lagrange 方程式がどのようなものかを考えてみる。

高階微分成分を持つ最もシンプルな例として  $q, \dot{q}, \ddot{q}$  の三つの変数を持つ Lagrangian  $L(q, \dot{q}, \ddot{q})$  を考える。この場合、二変数の時と同様に多変数のテーラー展開を考えれば良いので、変分  $\delta S$  は、

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} \delta \ddot{q} \right) dt \quad (16.2)$$

と表せる。最小作用の原理の時の計算を思い出せば、第二項は部分積分を行うことで  $\delta \dot{q}$  の微分の部分を消す事ができた。これは、第三項も同じである。やってみると、

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} \delta \ddot{q} \right) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q + \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} \delta \dot{q} \right) dt + \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right]_{t_1}^{t_2} + \left[ \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} \delta \dot{q} \right]_{t_1}^{t_2} \end{aligned} \quad (16.3)$$

となる。この時、境界条件  $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$  より、後ろの二つの項は消える。そして、第三項目を再度部分積分すれば、同様に  $\delta \dot{q}$  の微分を消すことができるので、最終的に

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \left( \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} \right) \delta q \quad (16.4)$$

という形に変形できる。この時、停留条件は  $\delta S = 0$  なので、任意の  $\delta q$  で満たすためには、

$$\frac{\partial L}{\partial q} + \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} = 0 \quad (16.5)$$

となる必要があり、これが  $\ddot{q}$  を含む場合の Lagrange 方程式になる。このような系に関して、オストログラドスキーの定理は次のことを主張する。ラグランジアン  $L = L(q, \dot{q}, \ddot{q})$  により記述される物理系について、そのラグランジアンが加速度  $\ddot{q}$  に関する非縮退条件

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \ddot{q}^2} \neq 0 \quad (16.6)$$

を満足するとき、この系のハミルトニアン  $H$  は上下ともに非有界となる。

## 16.2 オストログラドスキーの定理の具体例

次のラグランジアンにより記述される系について考える。

$$L = \frac{1}{2}\dot{q}^2 \quad (16.7)$$

この系の運動方程式は

$$\frac{d^4q}{dt^4} = 0 \quad (16.8)$$

という4階微分方程式である。この系はラグランジュ未定乗数  $\lambda$  を導入することにより、座標  $(q, Q, \lambda)$  で記述される次のラグランジアンへと書き換えられる。

$$L = \frac{1}{2}\dot{Q}^2 - \lambda(Q - \dot{q}) \quad (16.9)$$

これを正準形式へと書き換えることを考える。 $q, Q, \lambda$  に対応する正準運動量をそれぞれ  $p, P, \Lambda$  とすると

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \lambda, \quad P = \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}} = \dot{Q}, \quad \Lambda = \frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}} = 0 \quad (16.10)$$

となるが、このうち第1式および第3式は一般化速度  $\dot{q}, \lambda$  について解くことができないため、これは拘束系（英語版）となっている。対応するハミルトニアン

$$H = p\dot{q} + P\dot{Q} + \Lambda\dot{\lambda} - L \quad (16.11)$$

は、拘束条件を満足する超曲面上での等式として

$$H = \frac{1}{2}P^2 + pQ \quad (16.12)$$

という形に求まる。これは運動量  $p$  に線型に依存し、上下ともに非有界である。こうしてオストログラドスキーの定理が成立することが確認される。なお一般に定理が成立することを証明するには、この議論を任意のラグランジアン

$$L(q, \dot{q}, \ddot{q}) \quad (16.13)$$

に対して実行すればよい。この系についてオストログラドスキーゴーストに対応する自由度を次のような書き換えを通じて陽に分離することも可能である。まず、上の系は

$$L = \ddot{q}Q - \frac{1}{2}Q^2 \quad (16.14)$$

というラグランジアンと等価である（つまり等価な運動方程式を導く）。そこで新しい変数  $x, y$  を

$$x = \frac{q+Q}{\sqrt{2}}, \quad y = \frac{q-Q}{\sqrt{2}} \quad (16.15)$$

により定義し、ラグランジアンを座標  $x, y$  を用いて書き直すと

$$L = -\frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\dot{y}^2 - \frac{1}{4}(x-y)^2 \quad (16.16)$$

となる。このとき、座標  $x$  に関する運動項  $-\frac{1}{2}\dot{x}^2$  は負符号を取り、このためにハミルトニアンが下に非有界となっていることが見て取れる。すなわち力学変数  $x$  が表す自由度がオストログラドスキーゴーストである。

## 第17章 (おまけ) Hamilton-Jacobi 方程式と Schrödinger 方程式

(未完)

## 第18章 (おまけ) シンプレクティック数値積分

(未完)

## 第19章 (おまけ) Lagrangian が存在しない系

(未完)

## 第20章 (おまけ) 三次元ケプラー問題と Hamilton-Jacobi 方程式

(未完)

## 第21章 (おまけ) ラグランジュ点

(未完)

## 第22章 (おまけ) 2次元曲面上の測地線

(未完)

## 第23章 (おまけ) 二重振り子を Python で解く

(未完)