

力学 1 期末試験問題

担当: 佐藤寿紀, 2023 年 7 月 26 日 (水) 9:30–11:00 場所: A312. 資料持ち込み不可. 部分点あり.
可能な限り計算過程は言葉で説明すること. 合計 100 点とする.

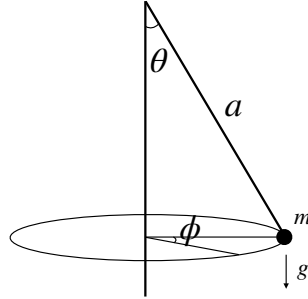


図 1: θ, ϕ 方向に動ける振り子。

1-1 [選択問題: 運動系]. 図 1 のように質量 m の質点が、自由に回転する支点から一定の長さ a の腕に固定され運動している。角度 θ, ϕ を図のように取った場合、次の問いに答えよ。重力加速度の大きさは下向きで g であるとする。

- この力学系の Lagrangian を求め、運動方程式を導け。ただし 3 次元極座標では、 $\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + r\sin\theta\dot{\phi}\mathbf{e}_\phi$ である。(10 点)
- ϕ が一定場合、 θ についての運動方程式を求めよ。また、 θ が小さいときの周期も求めよ。(10 点)
- θ が一定場合、 ϕ はどのような運動となるか。また、運動の周期も求めよ。(10 点)
- 問題 c の状況は、拘束条件とみなすことができる。通常、拘束条件がある場合は拘束力が発生する。一方で今回の場合は、ある条件下では拘束力を 0 とできる。どのような拘束力が働くかを考えながら、拘束力が 0 となる条件を示せ。(5 点)
- 問題 a の Lagrangian では (角度 θ, ϕ は自由)、循環座標は何で、どんな物理量が保存されているかを答えよ。また、この系で重力が働いていない場合は、どのような運動をとるか答えよ (元々の運動との違いも述べる事)。(5 点)

1-2 [選択問題: 証明系]. 講義で行った概念の証明・導入を行う。

- Lagrange 方程式は、任意の座標変換 (点変換)

$$Q^k = Q^k(q^1, \dots, q^K) \quad (k = 1, \dots, K)$$

において共変であることを証明せよ。(20 点)

- 系の運動が有界 (空間のある領域内だけに限られている場合) で、かつポテンシャルエネルギーが座標の同次関数である時、ビリアル定理

$$2\bar{T} = n\bar{U}$$

が成り立つ。 a 個の質点の運動エネルギー $T = \frac{1}{2} \sum_a m_a \mathbf{v}_a$ を速度 $\mathbf{v}_a$ で偏微分するところからスタートし、ビリアル定理を導入せよ。この時、時間についての任意の関数 $f(t)$ が有界である場合に、平均値に

$$\bar{f} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \frac{dF}{dt} dt = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{F(\tau) - F(0)}{\tau} = 0 \quad (1)$$

という性質があることと、 n 次の同時関数 f に関するオイラーの定理

$$\sum_i x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = n f(x_1, \dots, x_k) \quad (2)$$

を用いてよい。(18 点)

- 宇宙物理学におけるビリアル定理の応用例を一つあげよ。例をあげるだけでよく、説明の必要はない。(2 点)

2. Hamilton 形式を用いた運動に関して、次の問いに答えよ。

- a-1) 腕の長さ a の質量の無視できる棒の先に質量 m の質点がついた振り子の運動の Lagrangian を求めよ。この時、振り子の角度を θ とする。また、その Lagrangian を Legendre 変換して、 θ, p_θ (p_θ は角運動量) を力学変数に持つ Hamiltonian を求め、正準方程式から、それが Newton の運動方程式と等価であることを示せ。(10 点)
- a-2) 問題 a-1 の運動において、位相空間 (θ, p_θ) 上での軌道を図で表せ。またこの時、全力学エネルギーが変わる時、軌道の形状も変わるかを考察せよ。変わる場合は、何パターンに分けられるか、その時どんな運動であるかを説明せよ。(10 点)
- b-1) 質量 m 、バネ定数 k とある定数 K を考えた時、

$$L = e^{-\frac{K}{m}t} \left(\frac{m}{2} \dot{q}^2 - \frac{1}{2} k q^2 \right)$$

のような Lagrangian を考えてみる。この Lagrangian から得られる運動方程式は、どのようなバネの振動を表すか答えよ。また、Lagrangian から Hamiltonian への Legendre 変換は

$$H = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q} - L$$

と定義できるので、これを使ってこの系の Hamiltonian を求め、時間に依存するかを答えよ。(8 点)

- b-2) 問題 b-1 の続きを考える。講義で扱った母関数 F_2 に対する正準変換の関係式は、

$$p = \frac{\partial F_2}{\partial q}, \quad Q = -\frac{\partial F_2}{\partial P}, \quad H' = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}$$

である。今、母関数

$$F_2 = e^{\frac{K}{2m}t} q P$$

として、新しい Hamiltonian $H'(Q, P, t)$ を求めよ。そして、これは時間に依存するかを答えよ。(2 点)

3. 変分原理を用いた運動方程式の導出に関して、次の問いに答えよ。

- a) 力学変数 $q, \dot{q}$ を持つ Lagrangian $L(q, \dot{q})$ から Lagrange 方程式を最小作用の原理から求める際、以下のような変分を考えた。

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right)$$

ここで、仮定する力学系の Lagrangian が、力学変数として $\ddot{q}$ を含む場合 (つまり、 $L(q, \dot{q}, \ddot{q})$ の場合) を考えてみる。この時、変分 δS はどのように書き直せるかを示せ。(3 点)

- b) 問題 a) で求めた変分 δS を用いて、 $\ddot{q}$ を含む場合の Lagrange 方程式を導け。ヒント: 通常の最小作用の原理と同様に、部分積分を用いて $\delta \dot{q}$ の時間微分を消していくとよい。(10 点)
- c) 通常の Lagrangian $L(q, \dot{q})$ から得られる運動方程式は、一般座標の二階微分方程式 (時間の二階微分 $\ddot{q}$ を含む方程式) であった。問題 b) で得られる運動方程式は、何階の微分方程式になるかを簡単な理由も含めて答えよ。加えて、得られた n 階微分の項が時間に寄らず一定の場合 ($d^n q / dt^n = \text{一定}$)、その力学系の全エネルギーは保存されるか、そしてこの有界な世界でそのような力学系は物理的に可能かを考察せよ。(10 点)
- d) 講義で行ったように変分原理から Hamilton の正準方程式

$$\begin{cases} \frac{dq^k}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p^k} \\ \frac{dp^k}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^k} \end{cases} \quad (3)$$

を導け。(7 点)

4. 講義全体を通しての感想・批判を自由に記述せよ (ボーナス一律 3 点)。