力学 1 中間試験問題

担当: 佐藤寿紀, 2023 年 6 月 7 日（水）2 限実施. 資料持ち込み不可. 部分点あり.
可能な限り計算過程は言葉で説明すること. 問題 1-3 で合計 100 点とする.

---

1. Lagrangian と Lagrange 方程式に関して、次の問いに答えよ。

a) Lagrangian L を運動エネルギー T とポテンシャルエネルギー U を用いて表せ。また一般座標 q^i として、Lagrange 方程式を示せ。(5 点)

b) 時刻 t_1 から t_2 の間の質点の運動を考える。この時、作用積分を

$$S[q] = \int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot{q}(t), t) dt$$

と定義する。ここで、座標 $q(t)$ から任意微小関数 $\delta q(t)$ を考え、それに対応する作用を $S + \delta S$ とする。この時の $\delta q(t)$ 経路がずれた時の S の変化量 δS(S の第一変分) を示せ。ヒント: 変分 δS において被積分関数である δL の形をまず知りたい。そして、L は $q, \dot{q}$ の関数である。多変数関数のテーラー展開と考えた時の第二項 (関数の場合の一階微分の項) を考えれば良い。(10 点)

c) 上記の作用を最小 (停留) にすることで運動方程式を求めるが、この際、問題 b) で求めた δS をどのような値にすべきかを説明し、その結果として Lagrange 方程式が導かれることを示せ。注意: δq が任意に取れることも必ず言及すること。(15 点)

2. ダランベールの原理からの Lagrange 方程式の導出に関して、次の問いに答えよ。

a) デカルト座標のニュートンの運動方程式から

$$\sum_{i=1}^{3N} \left(F^i - m_i \frac{d^2 x^i}{dt^2} \right) \delta x^i = 0$$

というものを考え、一般座標 q^k における Lagrange 方程式を導きたい。ここで、$x^i = x^i(q^1, q^2, ..., q^k)$ として、δx^i は一般座標 q^k を用いて、どのように変換されるか？ヒント: 全微分と考え方は同じ。(5 点)

b) $\sum_i F^i$ がポテンシャルエネルギー U から導かれる保存力とする。この時、問題 b) の δx^i を用いて $\sum_i F^i \delta x^i$ を一般座標 q^k と U を用いて書き直せ。以降、簡単のため $\sum$ は省略しても良い。(10 点)

c) 以下の三つの関係

$$\frac{\partial \dot{x}^i}{\partial \dot{q}^k} = \frac{\partial x^i}{\partial q^k}, \quad \dot{x}\frac{\partial \dot{x}^i}{\partial q^k} = \frac{1}{2}\frac{\partial |\dot{x}^i|^2}{\partial q^k}, \quad \dot{x}\frac{\partial \dot{x}^i}{\partial \dot{q}^k} = \frac{1}{2}\frac{\partial |\dot{x}^i|^2}{\partial \dot{q}^k}$$

と問題 a) の関係を使いながら (証明しなくて良い)、問題 a) の式の第二項 ($\sum_i m_i \ddot{x}^i \delta x^i$) を計算し、

$$m_i \ddot{x}^i \frac{\partial x^i}{\partial q^k} \delta q^k = \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial}{\partial q^k} \right) \frac{m_i |\dot{x}^i|^2}{2} \delta q^k$$

となることを示せ。また、問題 b) の結果と合わせ、一般座標における Lagrange 方程式を導け。(15 点)

3. 対称性と保存則に関して、次の問いに答えよ。

a) Lagrangian がある特定の座標を含まない場合、その座標を「循環座標」と呼ぶ。この循環座標の例をあげるため、ある大きな天体 (質量 M) の周りを質量 m の小さな物体が円運動するとき状況を考える。この時、二次元極座標 (r, θ) 上での運動を考え、小さな物体の Lagrangian を示せ。この時、万有引力の大きさは $F = -G\frac{Mm}{r^2}$ である。(10 点)

b) 問題 b) で示した Lagrangian における循環座標は何であるか示せ。また、Lagrange 方程式にその Lagrangian を代入することで、どのような物理量が保存しているかを求めよ。(10 点)

c) 時間の並進対称性から導かれる保存則は何か？その系の Lagrangian が陽には時間に依存しない、すなわち $L = L(q, \dot{q})$ として、その時間微分 $\frac{dL}{dt}$ を計算して求めよ。(10 点)

d) N 個の自由な質点からなる系を考え、この系の空間並進対称性から運動量保存則を導きたい。$\boldsymbol{r}_a$ を a 番目の粒子の位置ベクトルとして、$\delta \boldsymbol{r}_a$ の微小変化を考えた時、その変化に対して Lagrangian は

$$\delta L = \sum_a \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r_a}} \cdot \delta \boldsymbol{r_a} = 0$$

のように不変であることから、運動量保存則を導け。注意: $\boldsymbol{r_a}$ はベクトル。(10 点)

【時間が余った人のための問題 (1)】 Lagrangian が

$$L = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}{c^2}} - U$$

で与えられているとする (m_0, c は定数である)。

a) U が座標のみの関数の場合、つまり $U = U(\boldsymbol{r})$ の場合を考える。ここで、$\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ である。この時の、x, y, z 座標に対する一般運動量 p_x, p_y, p_z を求めよ。また、$\boldsymbol{v} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$, $\boldsymbol{v}^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$ として、運動量ベクトル $\boldsymbol{p}$ を示せ。(10 点)

b) 次に、この Lagrangian が電荷 q を持つ荷電粒子に対するものとする。この時、U が電磁場のスカラーポテンシャル $\phi(\boldsymbol{r}, t)$ とベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ を使って、

$$U = U(\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}) = q\phi(\boldsymbol{r}, t) - q\dot{\boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t)$$

と書ける場合を考える。このポテンシャルを最初に定義した Lagrangian に入れた時、Lagrange 方程式より、

$$\frac{d}{dt}\gamma m_0 \boldsymbol{v} = -q\frac{d\boldsymbol{A}}{dt} - \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}}$$

となる事を示せ。ここで、

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\boldsymbol{v}^2}{c^2}}}$$

であり、γ をローレンツ因子 (Lorenz factor) と呼ぶ。(10 点)

c) ローレンツ因子は、光速度に近いところまで加速された場合の補正 (相対論的補正) で用いられる。今、ある一つの電子を 100 kV の電圧下で加速すると、その電子は、100 keV (キロエレクトロンボルト) のエネルギーまで加速される。この時、電子の速度は光速 c の約 50%である。この時、ローレンツ因子はいくつ程度になるか、小数点以下二桁まで答えよ (目安として $\sqrt{0.75} \simeq 0.87$ である)。また、この時電子の持つ全エネルギーもローレンツ因子分大きくなる (γm_0 として質量が大きくなったように見える)。静止時の電子のエネルギーを 511 keV として、加速後の全エネルギーはいくつ程度になるか概算せよ (10 の桁で四捨五入して良い)。(10 点)

【時間が余った人のための問題 (2)】講義内容を批判・評価せよ。例えば、前半の講義内容 (仮想仕事の原理・ダランベールの原理、最小作用の原理、対称性と保存則) の中で、理解が難しかったもの、簡単だったもの、より詳しく知りたかった事、面白かった事、つまらなかった事など自由に記述して良い。(来年度以降の講義の参考にする。有益な解答は 5 点程度加点する。)