

微分方程式・演習問題 No.9

2020 年 1 月 16 日 (木)

このプリントは, Oh-o! Meiji システム (URL: <http://oh-o2.meiji.ac.jp>) のクラス・ウェブ内のページ理工学部 微分方程式 吉田尚彦専任講師 (木) 4, 5 時限目秋学期からもダウンロードできます (メニューバーの資料に置いてあります. ファイル名: ensyu9.pdf). 質問等は takahiko@meiji.ac.jp まで.

定数係数 2 階線型微分方程式 (続きその 2)

定数 p, q と関数 $f(t)$ が与えられたとき, t を変数とする関数 x についての微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} + p\frac{dx}{dt} + qx = f(t) \quad (1)$$

を定数係数 2 階線形微分方程式という. 特に, 右辺の $f(x)$ が定数関数 $f(x) = 0$ のとき

$$\frac{d^2x}{dt^2} + p\frac{dx}{dt} + qx = 0 \quad (2)$$

を斉次方程式とよぶ. これに対して $f(x) \neq 0$ であるような (1) を非斉次方程式とよぶ.

非斉次方程式の解法 (定数変化法)

斉次方程式 (2) の解を変形することで, 非斉次方程式 (1) の解を求めよう.

特性根が虚数の場合

特性方程式が虚数解 $\alpha = a + \sqrt{-1}b$, $\beta = a - \sqrt{-1}b$ ($b \neq 0$) を持つ場合, 斉次方程式 (2) の一般解は

$$x(t) = Ae^{at} \cos bt + Be^{at} \sin bt \quad (A, B : \text{任意定数})$$

と表すことが出来た. そこでこの場合も, 定数 A, B を t についての関数 $A(t), B(t)$ に置き換えた

$$x(t) = A(t)e^{at} \cos bt + B(t)e^{at} \sin bt \quad (3)$$

が (1) の解になるよう $A(t), B(t)$ を求めよう. $A(t), B(t)$ について

$$0 = \frac{dA}{dt} \cos bt + \frac{dB}{dt} \sin bt \quad (4)$$

を要請すると, (3) を (1) の左辺に代入することで (3) が (1) の解であるためには,

$$-b \frac{dA}{dt} e^{at} \sin bt + b \frac{dB}{dt} e^{at} \cos bt = f(t)$$

を得る。これと (4) より

$$\begin{cases} \frac{dA}{dt} = -\frac{1}{b}e^{-at}f(t)\sin bt \\ \frac{dB}{dt} = \frac{1}{b}e^{-at}f(t)\cos bt. \end{cases} \quad (5)$$

これらを積分すれば、 $A(t)$, $B(t)$ が得られ、(3) へ代入することで (1) の解が求まる。

例 14

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 2x = e^{-t}$$

を解く。特性根を求めると

$$0 = \lambda^2 + 2\lambda + 2 = (\lambda + 1 - \sqrt{-1})(\lambda + 1 + \sqrt{-1}) \Rightarrow \lambda = -1 \pm \sqrt{-1}.$$

これと $f(t) = e^{-t}$ より

$$(5) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{dA}{dt} = -\sin t \\ \frac{dB}{dt} = \cos t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(t) = \cos t + C_1 \\ B(t) = \sin t + C_2. \end{cases}$$

これらを (3) へ代入して

$$x(t) = e^{-t} + C_1e^{-t}\cos t + C_2e^{-t}\sin t \quad (C_1, C_2 \text{は任意定数})$$

を得る。

問題 11 次の微分方程式を解け。

$$(1) \frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 2x = e^t \quad (2) \frac{d^2x}{dt^2} + x = t + 1$$