

# 微分方程式・演習問題 No.8

2020 年 1 月 9 日 (木)

このプリントは, Oh-o! Meiji システム (URL: <http://oh-o2.meiji.ac.jp>) のクラス・ウェブ内のページ理工学部 微分方程式 吉田尚彦専任講師 (木) 4, 5 時限目秋学期からもダウンロードできます (メニューバーの資料に置いてあります. ファイル名: ensyu8.pdf). 質問等は [takahiko@meiji.ac.jp](mailto:takahiko@meiji.ac.jp) まで.

## 定数係数 2 階線型微分方程式 (続き)

定数  $p$ ,  $q$  と関数  $f(t)$  が与えられたとき,  $t$  を変数とする関数  $x$  についての微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} + p\frac{dx}{dt} + qx = f(t) \quad (1)$$

を定数係数 2 階線形微分方程式という. 特に, 右辺の  $f(x)$  が定数関数  $f(x) = 0$  のとき

$$\frac{d^2x}{dt^2} + p\frac{dx}{dt} + qx = 0 \quad (2)$$

を斉次方程式とよぶ. これに対して  $f(x) \neq 0$  であるような (1) を非斉次方程式とよぶ.

## 非斉次方程式の解法 (定数変化法)

斉次方程式 (2) の解を変形することで, 非斉次方程式 (1) の解を求めよう. そのために, (2) の解を思い出そう. (2) の特性方程式の解 (特性根) を  $\alpha$ ,  $\beta$  とする. このとき,

—— 斉次方程式 (2) の一般解. ——

1.  $\alpha \neq \beta$  のとき, (2) の一般解は

$$x(t) = Ae^{\alpha t} + Be^{\beta t} \quad (A, B : \text{任意定数})$$

2.  $\alpha = \beta$  ( $\alpha$  が重根) のとき, (2) の一般解は

$$x(t) = Ae^{\alpha t} + Bte^{\alpha t} \quad (A, B : \text{任意定数})$$

$\alpha = \beta$  の場合

$\alpha \neq \beta$  の場合と同様にして, (2) の一般解の定数  $A$ ,  $B$  を  $t$  についての関数  $A(t)$ ,  $B(t)$  に置き換えて,

$$x(t) = A(t)e^{\alpha t} + B(t)te^{\alpha t} \quad (3)$$

が (1) の解になるよう  $A(t)$ ,  $B(t)$  を求めよう. (3) の両辺を  $t$  で微分すると

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dA}{dt}e^{\alpha t} + \alpha A(t)e^{\alpha t} + \frac{dB}{dt}te^{\alpha t} + B(t)e^{\alpha t} + \alpha B(t)e^{\alpha t}. \quad (4)$$

ここで,

$$0 = \frac{dA}{dt}e^{\alpha t} + \frac{dB}{dt}te^{\alpha t} \quad (5)$$

を要請すると,

$$(4) \Leftrightarrow \frac{dx}{dt} = \alpha A(t)e^{\alpha t} + B(t)e^{\alpha t} + \alpha B(t)te^{\alpha t}. \quad (6)$$

(6) の両辺をさらに  $t$  で微分し (5) を使うと

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \alpha \frac{dA}{dt}e^{\alpha t} + \alpha^2 A(t)e^{\alpha t} + \frac{dB}{dt}e^{\alpha t} + \alpha B(t)e^{\alpha t} + \alpha \frac{dB}{dt}te^{\alpha t} + \alpha B(t)e^{\alpha t} + \alpha^2 B(t)te^{\alpha t} \\ &= \alpha^2 A(t)e^{\alpha t} + \frac{dB}{dt}e^{\alpha t} + 2\alpha B(t)e^{\alpha t} + \alpha^2 B(t)te^{\alpha t}. \end{aligned} \quad (7)$$

(3), (6), (7) より

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + p \frac{dx}{dt} + qx &= \frac{dB}{dt}e^{\alpha t} + (2\alpha + p)B(t)e^{\alpha t} + (\alpha^2 + p\alpha + q) \{A(t)e^{\alpha t} + B(t)te^{\alpha t}\} \\ &= \frac{dB}{dt}e^{\alpha t}. \end{aligned} \quad (8)$$

ここで,  $\alpha$  は  $0 = \lambda^2 + p\lambda + q$  の重解であることを使った. 従って, (3) が (1) の解であるためには,

$$\frac{dB}{dt}e^{\alpha t} = f(t).$$

これと (5) より

$$\begin{cases} \frac{dA}{dt} = -e^{-\alpha t}tf(t) \\ \frac{dB}{dt} = e^{-\alpha t}f(t). \end{cases} \quad (9)$$

これらを積分すれば,  $A(t)$ ,  $B(t)$  が得られ, (3) へ代入することで (1) の解が求まる.

**例 13**

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + x = e^{-t}$$

を解く.  $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + x = 0$  の特性根を求めると

$$0 = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2 \Rightarrow \lambda = -1 \text{ (重解)}.$$

これと  $f(t) = e^{-t}$  より

$$(9) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{dA}{dt} = -t \\ \frac{dB}{dt} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(t) = -\frac{t^2}{2} + C_1 \\ B(t) = t + C_2. \end{cases}$$

これらを (3) へ代入して

$$x(t) = \frac{1}{2}t^2e^{-t} + C_1e^{-t} + C_2te^{-t} \quad (C_1, C_2 \text{ は任意定数})$$

を得る.

**問題 10** 次の微分方程式を解け.

$$(1) \frac{d^2x}{dt^2} - 6\frac{dx}{dt} + 9x = t \quad (2) \frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + x = t^2 \quad (3) \frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + x = \sin t$$