

微分方程式・演習問題 No.7

2019 年 12 月 19 日 (木)

このプリントは, Oh-o! Meiji システム (URL: <http://oh-o2.meiji.ac.jp>) のクラス・ウェブ内のページ理工学部 微分方程式 吉田尚彦専任講師 (木) 4, 5 時限目秋学期からもダウンロードできます (メニューバーの資料に置いてあります. ファイル名: ensyu7.pdf). 質問等は takahiko@meiji.ac.jp まで.

定数係数 2 階線型微分方程式

定数 p, q と関数 $f(t)$ が与えられたとき, t を変数とする関数 x についての微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} + p\frac{dx}{dt} + qx = f(t) \quad (1)$$

を定数係数 2 階線形微分方程式という. 特に, 右辺の $f(x)$ が定数関数 $f(x) = 0$ のとき

$$\frac{d^2x}{dt^2} + p\frac{dx}{dt} + qx = 0 \quad (2)$$

を斉次方程式とよぶ. これに対して $f(x) \neq 0$ であるような (1) を非斉次方程式とよぶ.

非斉次方程式の解法 (定数変化法)

斉次方程式 (2) の解を変形することで, 非斉次方程式 (1) の解を求めよう. そのために, (2) の解を思い出そう. (2) の特性方程式の解 (特性根) を α, β とする. このとき,

—— 斉次方程式 (2) の一般解. ——

1. $\alpha \neq \beta$ のとき, (2) の一般解は

$$x(t) = Ae^{\alpha t} + Be^{\beta t} \quad (A, B : \text{任意定数})$$

2. $\alpha = \beta$ (α が重根) のとき, (2) の一般解は

$$x(t) = Ae^{\alpha t} + Bte^{\alpha t} \quad (A, B : \text{任意定数})$$

$\alpha \neq \beta$ の場合

(2) の一般解の定数 A, B を t についての関数 $A(t), B(t)$ に置き換えて,

$$x(t) = A(t)e^{\alpha t} + B(t)e^{\beta t} \quad (3)$$

が (1) の解になるよう $A(t)$, $B(t)$ を求めよう. (3) の両辺を t で微分すると

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dA}{dt}e^{\alpha t} + \alpha A(t)e^{\alpha t} + \frac{dB}{dt}e^{\beta t} + \beta B(t)e^{\beta t}. \quad (4)$$

ここで,

$$0 = \frac{dA}{dt}e^{\alpha t} + \frac{dB}{dt}e^{\beta t} \quad (5)$$

を要請すると,

$$(4) \Leftrightarrow \frac{dx}{dt} = \alpha A(t)e^{\alpha t} + \beta B(t)e^{\beta t}. \quad (6)$$

(6) の両辺をさらに t で微分すると

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \alpha \frac{dA}{dt}e^{\alpha t} + \alpha^2 A(t)e^{\alpha t} + \beta \frac{dB}{dt}e^{\beta t} + \beta^2 B(t)e^{\beta t}. \quad (7)$$

(3), (6), (7) より

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + p \frac{dx}{dt} + qx &= \alpha \frac{dA}{dt}e^{\alpha t} + \beta \frac{dB}{dt}e^{\beta t} + (\alpha^2 + p\alpha + q)A(t)e^{\alpha t} + (\beta^2 + p\beta + q)B(t)e^{\beta t} \\ &= \alpha \frac{dA}{dt}e^{\alpha t} + \beta \frac{dB}{dt}e^{\beta t}. \end{aligned} \quad (8)$$

ここで, α, β は $0 = \lambda^2 + p\lambda + q$ の解であることを使った. 従って, (3) が (1) の解であるためには,

$$\alpha \frac{dA}{dt}e^{\alpha t} + \beta \frac{dB}{dt}e^{\beta t} = f(t).$$

これと (5) より

$$\begin{cases} \frac{dA}{dt} = \frac{1}{\alpha - \beta} e^{-\alpha t} f(t) \\ \frac{dB}{dt} = -\frac{1}{\alpha - \beta} e^{-\beta t} f(t). \end{cases} \quad (9)$$

これらを積分すれば, $A(t)$, $B(t)$ が得られ, (3) へ代入することで (1) の解が求まる.

例 12

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 5 \frac{dx}{dt} + 6x = e^{2t}$$

を解く. $\frac{d^2x}{dt^2} - 5 \frac{dx}{dt} + 6x = 0$ の特性根を求めると

$$0 = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda - 2)(\lambda - 3) \quad \lambda = 2, 3.$$

これと $f(t) = e^{2t}$ より

$$(9) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{dA}{dt} = e^{-t} \\ \frac{dB}{dt} = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(t) = -e^{-t} + C_1 \\ B(t) = -t + C_2. \end{cases}$$

これらを (3) へ代入して

$$x(t) = -e^{2t} - te^{2t} + C_1 e^{3t} + C_2 e^{2t} \quad (C_1, C_2 \text{ は任意定数})$$

を得る.

問題 9 次の微分方程式を解け.

$$(1) \frac{d^2x}{dt^2} - 6 \frac{dx}{dt} - 8x = te^{2t} \quad (2) \frac{d^2x}{dt^2} - 5 \frac{dx}{dt} + 6x = \sin t \quad (3) \frac{d^2x}{dt^2} - 5 \frac{dx}{dt} + 6x = 6t - 6$$