

微分方程式・演習問題 No.6

2019 年 11 月 28 日 (木)

このプリントは, Oh-o! Meiji システム (URL: <http://oh-o2.meiji.ac.jp>) のクラス・ウェブ内のページ理工学部 微分方程式 吉田尚彦専任講師 (木) 4, 5 時限目秋学期からもダウンロードできます (メニューバーの資料に置いてあります. ファイル名: ensyu6.pdf). 質問等は takahiko@meiji.ac.jp まで.

定数係数 2 階線型微分方程式

定数 p, q と関数 $f(t)$ が与えられたとき, t を変数とする関数 x についての微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} + p\frac{dx}{dt} + qx = f(t) \quad (1)$$

を定数係数 2 階線形微分方程式という. 特に, 右辺の $f(x)$ が定数関数 $f(x) = 0$ のとき

$$\frac{d^2x}{dt^2} + p\frac{dx}{dt} + qx = 0 \quad (2)$$

を斉次方程式とよぶ. これに対して $f(x) \neq 0$ であるような (1) を非斉次方程式とよぶ.

斉次方程式の解法

斉次方程式 (2) において, 2 次方程式 $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ を (2) の特性方程式といい, その解を特性根という. このとき,

—— 斉次方程式 (2) の一般解. ——

1. 特性方程式 $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ が相異なる 2 つの根 α, β を持つとき, (2) の一般解は

$$x(t) = Ae^{\alpha t} + Be^{\beta t} \quad (A, B : \text{任意定数})$$

2. 特性方程式 $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ が重根 α を持つとき, (2) の一般解は

$$x(t) = Ae^{\alpha t} + Bte^{\alpha t} \quad (A, B : \text{任意定数})$$

問題 7 次の微分方程式を解け.

$$(1) \frac{d^2x}{dt^2} - 4x = 0 \quad (2) \frac{d^2x}{dt^2} + 8\frac{dx}{dt} + 16x = 0 \quad (3) \frac{d^2x}{dt^2} - 4\frac{dx}{dt} - 5x = 0 \quad (4) \frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} + x = 0$$

特性根が虚数の場合

斉次方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = 0 \quad (3)$$

を考える。(3)の特性方程式を解くと、

$$0 = \lambda^2 + 1 = (\lambda + \sqrt{-1})(\lambda - \sqrt{-1})$$

より、特性根は $\lambda = \pm\sqrt{-1}$. これを、形式的に、斉次方程式の解の公式に代入すると、

$$x(t) = Ae^{-\sqrt{-1}t} + Be^{\sqrt{-1}t} \quad (A, B \text{ は任意定数}) \quad (4)$$

となるが、 $e^{-\sqrt{-1}t}$ や $e^{\sqrt{-1}t}$ は一体何であろうか？実は、以下で述べるように指数関数 e^θ は θ が複素数の場合にも拡張され、従って、(4)も意味を持ち(3)の解を与える。

複素変数の指数関数

複素数 $z = a + \sqrt{-1}b$ に対して、 e^z を

$$e^z := e^a (\cos b + \sqrt{-1} \sin b) \quad (5)$$

と定める。 z を複素変数とする指数関数 e^z は実数変数の指数関数と同様の性質を持つことが知られている。

注 4 (5)において、 $a = 0$ とすると、

$$e^{\sqrt{-1}b} = \cos b + \sqrt{-1} \sin b$$

を得る。これを **Euler の公式** という。

複素変数の指数関数を用いると、一般に次のことが分かる。 p, q を実数の定数とする。斉次方程式 (2) が特性根 $a \pm \sqrt{-1}b$ を持つ場合¹、(2)の一般解は複素数値関数として

$$x(t) = Ae^{(a+\sqrt{-1}b)t} + Be^{(a-\sqrt{-1}b)t} \quad (A, B \text{ は任意定数. 複素数でもよい}) \quad (6)$$

である。(5)を用いて、(6)を式変形すると

$$\begin{aligned} (6) &= Ae^{at} (\cos bt + \sqrt{-1} \sin bt) + Be^{at} (\cos bt - \sqrt{-1} \sin bt) \\ &= (A+B)e^{at} \cos bt + \sqrt{-1}(A-B)e^{at} \sin bt \end{aligned}$$

となる。ここで、 $C_1 := (A+B)$ 、 $C_2 := \sqrt{-1}(A-B)$ とおくと、 A, B が任意の複素数の定数なので、 C_1, C_2 の任意の複素数の定数である。したがって、(6)は

$$x(t) = C_1 e^{at} \cos bt + C_2 e^{at} \sin bt \quad (C_1, C_2 \text{ は任意定数}) \quad (7)$$

と表すこともできる。特に、(7)において、 C_1, C_2 を実数に限定したものは(2)の実数値関数の一般解を与える。

問題 8 次の微分方程式を解け。

$$(1) \frac{d^2x}{dt^2} - 4\frac{dx}{dt} + 5x = 0 \quad (2) \frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 5x = 0$$

¹実数係数の2次方程式 $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ が複素数の解 $\lambda = a + \sqrt{-1}b$ を持つならば、残りの解は $\bar{\lambda} = a - \sqrt{-1}b$ である。