

微分方程式・演習問題 No.5

2019 年 11 月 21 日 (木)

このプリントは, Oh-o! Meiji システム (URL: <http://oh-o2.meiji.ac.jp>) のクラス・ウェブ内のページ理工学部 微分方程式 吉田尚彦専任講師 (木) 4, 5 時限目秋学期からもダウンロードできます (メニューバーの資料に置いてあります. ファイル名: ensyu5.pdf). 質問等は takahiko@meiji.ac.jp まで.

定数係数 2 階線型微分方程式

定数 p, q と関数 $f(t)$ が与えられたとき, t を変数とする関数 x についての微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} + p\frac{dx}{dt} + qx = f(t) \quad (1)$$

を定数係数 2 階線形微分方程式という. 特に, $f(x) = 0$ のとき (1) を斉次方程式, $f(x) \neq 0$ のとき (1) を非斉次方程式という.

斉次方程式の解法

斉次方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} + p\frac{dx}{dt} + qx = 0 \quad (2)$$

を変数分離形や 1 階線型微分方程式に帰着させることで解きたい. そのために次の考察をする. もし, ある定数 α, β を用いて (2) の左辺が

$$(2) \text{ の左辺} = \frac{d^2x}{dt^2} - \alpha\frac{dx}{dt} - \beta\left(\frac{dx}{dt} - \alpha x\right) \quad (3)$$

と表せたとすると

$$X(t) = \frac{dx}{dt} - \alpha x \quad (4)$$

とおくことにより, (2) は

$$\frac{dX}{dt} = \beta X$$

と書き直すことができる. これは X についての変数分離形なので解くことができ,

$$X(t) = Ce^{\beta t} \quad (C \text{ は任意定数}) \quad (5)$$

を得る. これを (4) へ代入すると

$$\frac{dx}{dt} - \alpha x = Ce^{\beta t} \quad (6)$$

となり, (2) は x についての 1 階線型微分方程式 (6) に帰着できる.

そこで, (3) を満たす α, β を求める. (2) の左辺と (3) の右辺を比べると

$$(3) \Leftrightarrow p = -(\alpha + \beta), \quad q = \alpha\beta$$

であることが分かるので, α, β は 2 次方程式

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0 \tag{7}$$

の解であることが分かる. (7) を (2) の特性方程式といい, その解 α, β を特性根という.

問題 6 α, β を斉次方程式 (2) の特性根とする.

(1) $\alpha \neq \beta$ のとき, 1 階線型微分方程式 (6) を解け.

(2) $\alpha = \beta$ のとき, 1 階線型微分方程式 (6) を解け.