微分方程式・演習問題No.4

2019年11月14日（木）

このプリントは, Oh-o! Meijiシステム（URL: http://oh-o2.meiji.ac.jp）のクラス・ウェブ内のページ理工学部　微分方程式　吉田尚彦専任講師（木）4，5時限目秋学期からもダウンロードできます（メニューバーの資料に置いてあります．ファイル名：ensyu4.pdf）．質問等は **takahiko@meiji.ac.jp** まで．

1階線型微分方程式

t を変数とする関数 x について，微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = g(t)x + h(t) \tag{1}$$

を1階線型微分方程式という．ここで，$g(t)$，$h(t)$ は与えられた関数とする．

例 9 $\dfrac{dx}{dt} = ax + t$（但し，a は定数）は1階線型微分方程式．対応する $g(t)$，$h(t)$ はそれぞれ $g(t) = 1$，$h(t) = t$.

例 10 $\dfrac{dx}{dt} = -x + e^t$ は1階線型微分方程式．対応する $g(t)$，$h(t)$ はそれぞれ $g(t) = -1$，$h(t) = e^t$.

定数変化法

1階線型微分方程式 (1) を解こう．まず，$h(t) = 0$ の場合を考える．このとき，(1) を**斉次方程式**という．これに対して，$h(t) \neq 0$ の場合，(1) を**非斉次方程式**という．$h(t) = 0$ の場合は (1) は変数分離形なので，両辺を x で割り，t について積分すると

$$\begin{aligned} &\int \frac{1}{x}dx = \int \frac{1}{x}\frac{dx}{dt}dt = \int g(t)dt \\ \Rightarrow\quad &\log|x| = G(t) + C_1 \quad (G(t) \text{ は g(t) の原始関数,} C_1 \text{は積分定数}) \\ \Rightarrow\quad &x(t) = \pm e^{G(t)+C_1} = Ce^{G(t)}. \end{aligned} \tag{2}$$

ここで $C := \pm e^{C_1}$ とおいた．C は0以外の任意定数である．この解を得る過程において (1) の両辺を x で割っているため，この操作は $x(t) \neq 0$ であるような t の範囲でのみ正しい．それでは，そもそもある t（$= t_0$）で $x(t_0) = 0$ となるような解にはどのようなものがあるかと考えると，以前説明したとおり，そのような解は定数関数 $x(t) = 0$ しかない．これは (2) において $C = 0$ とした場合である．以上まとめると，解は

$$\therefore \quad x(t) = Ce^{G(t)} \quad (C \text{ は任意定数}). \tag{3}$$

次に，$h(t) = 0$ の場合に上で得られた解 (3) を利用して，$h(t) \neq 0$ の場合の (1) の解が得られないか考えよう．その為に (3) の両辺を t で微分すると

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(Ce^{G(t)}\right) = \frac{dC}{dt}e^{G(t)} + C\frac{d}{dt}\left(e^{G(t)}\right) = \frac{dC}{dt}e^{G(t)} + Ce^{G(t)}\frac{dG}{dt} = \frac{dC}{dt}e^{G(t)} + g(t)x$$

となる．今の場合は C は定数なので $\dfrac{dC}{dt}=0$ であるが，もし $\dfrac{dC}{dt}\neq 0$（つまり，C が定数ではなく t についての関数 $C(t)$）ならば，(1) とよく似た式が得られる．そこで，$h(t)\neq 0$ の場合は，(3) において C を t についての関数 $C(t)$ に置き換えた

$$x(t)=C(t)e^{G(t)} \tag{4}$$

の形の解を探す．(1) の両辺に (4) を代入し比較することにより，(4) が (1) の解になるための条件は

$$\frac{dC}{dt}=h(t)e^{-G(t)}$$

であることが分かる．この両辺を t について積分すると

$$C(t)=\int h(t)e^{-G(t)}dt$$

を得る．これを (4) へ代入して

$$x(t)=\left(\int h(t)e^{-G(t)}dt\right)e^{G(t)} \tag{5}$$

を得る．このような方法を**定数変化法**という．

注 3　1 階線型微分方程式 (1) の解は必ず (5) の形で表せる．実際，解 (5) の他に $x_1(t)$ も (1) の解であったとすると，$x_1(t)-x(t)$ は斉次方程式 $\dfrac{d(x_1-x)}{dt}=g(t)(x_1-x)$ を満たすので，

$$x_1(t)-x(t)=Ee^{G(t)}\quad (E \text{ は定数})$$

となる．ここで，$h(t)e^{-G(t)}$ の原始関数の *1* つを $H(t)$ とすると

$$\int h(t)e^{-G(t)}dt=H(t)+D\quad (D \text{ は任意定数})$$

と表せることに注意すると

$$x_1(t)=x(t)+Ee^{G(t)}=\left(\int h(t)e^{-G(t)}dt\right)e^{G(t)}+Ee^{G(t)}=(H(t)+D+E)\,e^{G(t)}$$

となる．

以上，まとめると次のようになる．

1 階線型微分方程式 (1) の解

1 階線型微分方程式 $\dfrac{dx}{dt}=g(t)x+h(t)$ の解は

$$x(t)=\left(\int h(t)e^{-G(t)}dt\right)e^{G(t)}$$

ここで，$G(t)$ は $g(t)$ の原始関数とする．

例 11　$\dfrac{dx}{dt}=ax+t$（但し，a は定数）を解く．始めに，右辺の t を落とした $\dfrac{dx}{dt}=ax$ を解いて，$x(t)=Ce^{at}$ を得る．次に，C を関数 $C(t)$ に置き換えた $x(t)=C(t)e^{at}$ を考える．この両辺を t で微分すると

$$\frac{dx}{dt}=\frac{dC}{dt}e^{at}+C(t)e^{at}a=\frac{dC}{dt}e^{at}+ax$$

なので，これが $\dfrac{dx}{dt}=ax+t$ の解であるためには

$$\frac{dC}{dt}e^{at}=t \text{ 従って，}\frac{dC}{dt}=te^{-at}.$$

この両辺を t で積分すると

$$C(t) = \int te^{-at}dt = -\frac{1}{a}te^{-at} + \frac{1}{a}\int e^{-at}dt = -\frac{1}{a}te^{-at} - \frac{1}{a^2}e^{-at} + D.$$

以上より，

$$x(t) = \left(-\frac{1}{a}te^{-at} - \frac{1}{a^2}e^{-at} + D\right)e^{at} = -\frac{t}{a} - \frac{1}{a^2} + De^{at} \quad (D \text{ は任意定数}).$$

問題 5 次の微分方程式を解け.

$$(1)\ \frac{dx}{dt} = -2tx + t \quad (2)\ \frac{dx}{dt} = x + \sin t \quad (3)\ \frac{dx}{dt} = -\frac{x}{t} + \log t \ (t > 0)$$

参考 1 (ベルヌーイ方程式) n を整数，$p(t)$，$q(t)$ を連続関数とするとき，微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = -p(t)x + q(t)x^n$$

を考える．この微分方程式は $n = 0$ ならば 1 階線型，$n = 1$ ならば変数分離形である．$n \neq 0$，1 の場合，$u = x^{1-n}$ と変数変換すると，この方程式は u についての 1 階線型微分方程式に帰着する．この微分方程式を**ベルヌーイ方程式**という.