微分方程式・演習問題No.3

2019 年 10 月 31 日（木）

このプリントは, Oh-o! Meiji システム（URL: http://oh-o2.meiji.ac.jp）のクラス・ウェブ内のページ**理工学部　微分方程式　吉田尚彦専任講師（木）4，5 時限目秋学期**からもダウンロードできます（メニューバーの資料に置いてあります．ファイル名：ensyu3.pdf）．質問等は **takahiko@meiji.ac.jp** まで．

変数分離形微分方程式の応用

冷却の問題

物体 A を空気中（または水中）に放置したときの A の温度変化を見る．放置し始めてから t 分後の A の温度を $T(t)$，気温（または水温）を $T_m(t)$ とすると，$T(t)$ の時間変化の割合 $\dfrac{dT}{dt}(t)$ は A の温度 と気温（または水温）の差 $T(t) - T_m(t)$ に比例することが知られている，つまり

$$\frac{dT}{dt}(t) = k(T(t) - T_m(t)) \quad (k \text{ は比例定数}) \tag{1}$$

が成り立つ．ここで k は物体 A や空気（または水）に依存する量である．

例題 1 温度 100 ℃の銅球を水温 30 ℃の水中にいれたら，3 分後に銅球の温度は 70 ℃になった．水温は一定であるとして次の問に答えよ．
(1) 水中に入れてから銅球の温度が 35 ℃になるのは何分後か．ただし，$\log 2 = 0.7$，$\log 7 = 1.9$ としてよい．
(2) 6 分後の銅球の温度を求めよ．

解． 銅球を水に入れた時刻を $t = 0$ とし，時刻 t での銅球の温度を $T(t)$ とすると (1) より

$$\frac{dT}{dt}(t) = k(T(t) - 30) \tag{2}$$

$$T(0) = 100 \tag{3}$$

$$T(3) = 70 \tag{4}$$

が成り立つ．
（i）まず，(2) を解く．全ての t で $T(t) \neq 30$ の時は，$\frac{1}{T(t)-30}\frac{dT}{dt}(t) = k$ の両辺を t で積分すると

$$\log|T(t) - 30| = kt + C_1 \quad (C_1 \text{は任意定数})$$

$$\therefore\ T(t) = 30 + C_2 e^{kt} \quad (C_2 \text{は 0 以外の任意定数}). \tag{5}$$

一方で，常微分方程式の解の一意性から，ある $t = t_0$ で $T(t_0) = 30$ となるような (2) の解は定数関数 $T(t) = 30$ のみ．これは (5) で $C_2 = 0$ としたもの．以上まとめて，(2) の解は

$$T(t) = 30 + C_2 e^{kt} \quad (C_2 \text{は任意定数}).$$

（ii）このなかで (3) を満たすものを探すと，

$$100 = 30 + C_2 \;\Rightarrow\; C_2 = 70.$$

（iii）さらに (4) より

$$70 = 30 + 70e^{3k} \;\Rightarrow e^{3k} = \frac{4}{7} \;\Rightarrow\; k = \frac{1}{3}\log\frac{4}{7} = \frac{1}{3}(2\log 2 - \log 7).$$

以上より

$$T(t) = 30 + 70e^{kt}\ (\text{但し}\ k = \frac{1}{3}(2\log 2 - \log 7)). \tag{6}$$

(2) の解． (6) より

$$T(6) = 30 + 70(e^{3k})^2 = 30 + 70(\frac{4}{7})^2 = 52.85\cdots.\ \therefore\ 52.9\ ℃.$$

(1) の解． (6) より

$$35 = 30 + 70e^{kt} \;\Rightarrow t = \frac{\log\frac{1}{14}}{k} = \frac{3(-\log 2 - \log 7)}{2\log 2 - \log 7} = 15.6.\quad \therefore\ 15.6\ \text{分後}.$$

問題 3 10 ℃の物体を気温 20 ℃の外気中に放置したら，5 分後にその物体の温度が 12 ℃になった．気温は一定であるとして次の問に答えよ．
(1) 20 分後にその物体の温度は何度になるか．
(2) その物体が 15 ℃になるまでにかかる時間を求めよ．ただし，$\log 2 = 0.7$，$\log 0.8 = -0.2$ としてよい．

増殖崩壊の問題

例題 2 ある放射性物質 A を放置すると，時間の経過とともにほかの物質へと少しずつ変化していく．このことを，A が崩壊するという．A を放置してから t 時間後に変化せずに残っている量を $N(t)$ とおくと，$N(t)$ の時間変化の割合は $N(t)$ 自身に比例する．その物質 A が初め $50mg$ 存在しており，2 時間後に初め存在していた量の 10 %が失われた．次の問に答えよ．
(1) 4 時間後に存在している量を求めよ．
(2) はじめに存在していた量から半分になるまでの時間（半減期という）を求めよ．ただし，$\log 2 = 0.7$，$\log 0.9 = -0.1$ としてよい．

解． まず，$N(t)$ について次が成り立つ．

$$\frac{dN}{dt}(t) = kN(t)\ (k\ \text{は比例定数}),\quad N(0) = 50$$

これを先の問題と同様に解くと

$$N(t) = 50e^{kt}.$$

ここで，2 時間後に 50mg の 10 %が失われた，つまり 45mg になったので

$$45 = 50e^{2k} \;\Rightarrow e^{2k} = 0.9 \;\Rightarrow k = \frac{1}{2}\log 0.9.$$

(1) の解．

$$N(4) = 50e^{4k} = 50(e^{2k})^2 = 50(\frac{9}{10})^2 = 40.5.\ \therefore\ 40.5\text{mg}.$$

(2) の解．

$$25 = 50e^{kt} \;\Rightarrow t = \frac{1}{k}\log\frac{1}{2} = 14\ \therefore\ 14\ \text{時間後}.$$

問題 4 ある化学反応で 1 つの物質が他の物質に変化するとき，変化する量の時間変化の割合は，変化しないで残っている量に比例する．この物質が 1 時間後に $48g$ 残り，3 時間後に $12g$ 残った．最初にあった量を求めよ．