

微分方程式・演習問題 No.2

2019 年 10 月 10 日 (木)

このプリントは, Oh-o! Meiji システム (URL: <http://oh-o2.meiji.ac.jp>) のクラス・ウェブ内のページ理工学部 微分方程式 吉田尚彦専任講師 (木) 4, 5 時限目秋学期からもダウンロードできます (メニューバーの資料に置いてあります. ファイル名: ensyu2.pdf). 質問等は takahiko@meiji.ac.jp まで.

同次形微分方程式

t を変数とする関数 x について, 微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = f\left(\frac{x}{t}\right) \quad (\text{ただし, } t \neq 0) \quad (1)$$

を同次形微分方程式という. ここで, $f(u)$ は与えられた関数とする.

例 5 $\frac{dx}{dt} = \frac{x}{t}$ は同次形. 対応する $f(u)$ は $f(u) = u$.

例 6 $\frac{dx}{dt} = \frac{x^2 + 2tx}{t^2}$ は同次形. 対応する $f(u)$ は $f(u) = u^2 + 2u$.

同次形微分方程式 (1) について $u = \frac{x}{t}$ とおくと, $x = tu$ より, $\frac{dx}{dt} = u + t \frac{du}{dt}$. これらを (1) に代入すると,

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow u + t \frac{du}{dt} = f(u) \\ &\Leftrightarrow \frac{du}{dt} = \frac{f(u) - u}{t} \end{aligned}$$

となり, 関数 $u = u(t)$ についての変数分離形に帰着できる.

例 7 $\frac{dx}{dt} = \frac{x}{t}$ を解いてみよう. $u = \frac{x}{t}$ とおくと,

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} = \frac{x}{t} &\Leftrightarrow u + t \frac{du}{dt} = u \\ &\Leftrightarrow \frac{du}{dt} = 0 \\ &\Leftrightarrow u(t) = C \\ &\Leftrightarrow x(t) = Ct. \quad (C \text{ は任意の定数}) \end{aligned}$$

例 8 $\frac{dx}{dt} = \frac{x^2 + 2tx}{t^2}$ を解いてみよう. $u = \frac{x}{t}$ とおくと,

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} = \frac{x^2 + 2tx}{t^2} &\Leftrightarrow u + t \frac{du}{dt} = u^2 + 2u \\ &\Leftrightarrow \frac{du}{dt} = \frac{u(u+1)}{t}. \end{aligned}$$

まず, u について, 全ての t で $u(t) \neq 0, -1$ であるような解を探そう. 両辺を $u(u+1)$ で割り t について積分すると

$$\int \frac{1}{u(u+1)} \frac{du}{dt} dt = \int \frac{1}{t} dt = \log|t| + C_1. \quad (C_1 \text{ は任意の定数}) \quad (2)$$

置換積分より左辺は

$$\int \frac{1}{u(u+1)} \frac{du}{dt} dt = \int \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1} \right) du = \log \left| \frac{u}{u+1} \right|. \quad (3)$$

(2) と (3) から,

$$\begin{aligned} (2) &\Leftrightarrow \log \left| \frac{u}{u+1} \right| = \log|t| + C_1 \\ &\Leftrightarrow \log \left| \frac{u}{(u+1)t} \right| = C_1 \\ &\Leftrightarrow \frac{u}{(u+1)t} = \pm e^{C_1} \\ &\Leftrightarrow \frac{u}{(u+1)t} = C. \quad (C = \pm e^{C_1} \text{ とおいた. } C \neq 0 \text{ に注意}) \end{aligned}$$

これに $u = \frac{x}{t}$ を代入し, x について解くと

$$x(t) = \frac{Ct^2}{1 - Ct}. \quad (C \text{ は } 0 \text{ でない定数}) \quad (4)$$

一方, ある t ($t = t_0$ とする) で $u(t_0) = 0$ (または $u(t_0) = -1$) となるような解は定数関数 $u(t) = 0$ (または $u(t) = -1$) のみ. $u = \frac{x}{t}$ より, これらはそれぞれ, $x(t) = 0$, または $x(t) = -t$. $x(t) = 0$ は, (4) において, $C = 0$ としたもの. $x(t) = -t$ は (4) の形には含まれない. 以上より, $\frac{dx}{dt} = \frac{x^2 + 2tx}{t^2}$ の解は,

$$x(t) = \frac{Ct^2}{1 - Ct} \quad (C \text{ は任意の定数}) \quad \text{または} \quad x(t) = -t$$

となる.

問題 2 次の微分方程式を解け.

$$(1) \quad \frac{dx}{dt} = 2 - \frac{x}{t} \quad (2) \quad \frac{dx}{dt} = 1 + \frac{x}{t} + \frac{x^2}{t^2}$$