微分方程式・演習問題No.1

2019 年 10 月 3 日（木）

このプリントは, Oh-o! Meiji システム（URL: http://oh-o2.meiji.ac.jp）のクラス・ウェブ内のページ**理工学部　微分方程式　吉田尚彦専任講師（木）4，5 時限目秋学期**からもダウンロードできます（メニューバーの資料に置いてあります．ファイル名：ensyu1.pdf）．質問等は **takahiko@meiji.ac.jp** まで．

この講義では特に断らない限り，独立変数を t で，未知関数を x で表す．1 階導関数 $\dfrac{dx}{dt}$ を x'，2 階導関数 $\dfrac{d^2x}{dt^2}$ を x'' で表すこともある．また，3 階以上の導関数 $\dfrac{d^nx}{dt^n}$（ただし $n \geq 3$）を $x^{(n)}$ で表すこともある．

変数分離形の解法

t を変数とする関数 x について，微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = g(t)f(x) \tag{1}$$

を変数分離形という．ここで，$f(x)$，$g(t)$ は与えられた C^1 級の関数とする．

例 1 $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{t^2}{x^2}$ は変数分離形．対応する $f(x)$，$g(t)$ はそれぞれ $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$，$g(t) = t^2$．

例 2 $\dfrac{dx}{dt} = ax$（但し，a は定数）は変数分離形．対応する $f(x)$，$g(t)$ はそれぞれ $f(x) = x$，$g(t) = a$．

変数分離形微分方程式 (1) を満たす $x = x(t)$ を求めよう．(1) を満たす $x = x(t)$ を求めることを (1) を解くといい，(1) を満たす $x = x(t)$ を (1) の解という．

x_0 を $f(x)$ の零点（つまり，$f(x_0) = 0$）とする．まず，(1) の解 $x = x(t)$ で x_0 を値にとらない（つまり，全ての t で $x(t) \neq x_0$ である）ようなものを求める．このような $x(t)$ については $f(x(t)) \neq 0$ であるので，(1) の両辺を $f(x)$ で割り，t について積分すると

$$\int \frac{1}{f(x)}\frac{dx}{dt}dt = \int g(t)dt. \tag{2}$$

置換積分より，(2) の左辺は $\displaystyle\int \frac{1}{f(x)}dx$ に等しい．ここで，$F(x)$，$G(t)$ をそれぞれ $\dfrac{1}{f(x)}$，$g(t)$ の原始関数とすると，(2) は

$$F(x) = G(t) + C \quad (C \text{ は任意の定数}) \tag{3}$$

と書ける．さらに，全ての t に対して $\dfrac{dF}{dx} = \dfrac{1}{f(x)} \neq 0$ であることから，$F(x)$ は逆関数 F^{-1} を持つ．特に，(3) は x について解くことができ，(1) の解は

$$x = F^{-1}\left(G(t) + C\right)$$

となる．

次に，(1) の解 $x(t)$ で，ある t（$t=t_0$ とする）で $x(t_0)=x_0$ となるようなものを求める．すぐに分かるのは定数関数 $x(t)=x_0$ はそのような解である．さらに，このような解が他にあるかどうかを考えると，実はこれ以外に解はないことが次の事実から分かる．

常微分方程式の解の存在と一意性

> 一般に，微分方程式 $\dfrac{dx}{dt}=H(t,x)$（ここで，$H(t,x)$ は C^1 級の関数）の C^1 級の解 $x=x(t)$ で，初期条件 “$t=t_0$ のとき，$x(t_0)=x_0$”を満たすものはただ 1 つだけ存在する．

実際，関数 $x=x(t)$ が $x_0=x(t_0)$ を満たす (1) の解ならば，定数関数 $x(t)=x_0$ もそのような解なので，上の事実からこれらは一致しなければならない．

以上，まとめると次のようになる．

変数分離形 (1) の解

> 変数分離形微分方程式 (1) の解は
>
> $$x(t)=F^{-1}\left(G(t)+C\right) \tag{4}$$
>
> または
>
> $$x(t)=x_0. \tag{5}$$
>
> ここで，$F(x)$，$G(t)$ はそれぞれ $\dfrac{1}{f(x)}$，$g(t)$ の原始関数，C は任意の定数．x_0 は $f(x)=0$ を満たす x の値とする．

注 1 解 (4) を (1) の**一般解**という．解 (5) はしばしば (4) の形に含まれる．そうでない場合，(5) を**特異解**という．

注 2 $f(x)=0$ となる x の値が複数個ある場合，例えば，$x_0,x_1,\ldots,x_n$ をそのような値とすると，n 個の定数関数 $x(t)=x_0, x(t)=x_1,\ldots,x(t)=x_n$ は全て (1) の解である．

例 3 $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{t^2}{x^2}$ を解いてみよう．両辺に x^2 をかけて t について積分すると

$$\int x^2\frac{dx}{dt}dt=\int t^2dt=\frac{t^3}{3}+C_1.\quad (C_1\text{は任意の定数})$$

置換積分より左辺は $\displaystyle\int x^2dx$ に等しいので，結局，$x^3=t^3+3C_1$ を得る．$C:=3C_1$ とおき x について解くと，

$$x(t)=\left(t^3+C\right)^{\frac{1}{3}}.$$

例 4 $\dfrac{dx}{dt}=ax$（但し，a は定数）を解いてみよう．まず，全ての t で $x(t)\neq 0$ であるような解を探そう．両辺を x で割り t について積分すると

$$\int\frac{1}{x}\frac{dx}{dt}dt=\int adt=at+C_1.\quad (C_1\text{は任意の定数})$$

置換積分より左辺は $\displaystyle\int\frac{1}{x}dx$ に等しいので，結局，$\log|x|=at+C_1$ を得る．よって，$x=\pm e^{at+C_1}=\pm e^{C_1}e^{at}$．ここで，$\pm e^{C_1}$ は 0 以外の任意の値を取り得る定数である．$C:=\pm e^{C_1}$ とおけば，

$$x(t)=Ce^{at}\quad (C\text{ は 0 以外の任意定数}) \tag{6}$$

を得る．次に，ある t（$t = t_0$ とする）で $x(t_0) = 0$ となるような解を探すと，上の議論によって，このような解は定数関数 $x(t) = 0$ のみ．これは，(6) において，$C = 0$ としたもの．以上、まとめると，$\dfrac{dx}{dt} = ax$ の解は，

$$x(t) = Ce^{at} \quad (C \text{ は任意の定数})$$

となる．

問題 1 次の微分方程式を解け．

$$(1) \quad \frac{dx}{dt} = -tx \quad (2) \quad \frac{dx}{dt} = \frac{x^2 - 1}{t} \quad (3) \quad \frac{dx}{dt} = \sqrt{x - 1}$$