

微分方程式・演習問題 No.9

2010 年 12 月 24 日 (金)

このプリントは, Oh-o! Meiji システム (URL: <http://oh-o.meiji.ac.jp>) のクラス・ウェブ内のページ **工学部 1 部 微分方程式 吉田尚彦兼任講師 (金) 1, 4 時限目後期** からダウンロードできます (メニューバーの資料に置いてあります. ファイル名: ensyu9.pdf). 質問等は takahiko@math.meiji.ac.jp まで.

発展：定数係数 2 階線形微分方程式の特解の求め方 - $f(x)$ が一般の場合

前回, 定数係数 2 階線形微分方程式の非同次方程式

$$y'' + py' + qy = f(x) \quad (p, q \text{ は定数}) \quad (1)$$

において, $f(x)$ が特別な形をしている場合に特解の発見法を説明した. $f(x)$ が一般の場合に特解を求めるには, ラプラス変換を用いる方法や定数変化法などがあるが, ここではグリーン関数との畳み込みによって特解を求める方法を説明する.

特性方程式 $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ の解を α, β とする. 関数 $G(x)$ を次で定める

$$G(x) = \begin{cases} \frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{\alpha - \beta} & (\alpha \neq \beta \text{ のとき}) \\ xe^{\alpha x} & (\alpha = \beta \text{ のとき}). \end{cases}$$

このとき, 次が成り立つ.

定理 ((1) の特解)

関数 u を

$$u(x) = \int_0^x G(x-t)f(t)dt \quad (2)$$

とおくと, u は (1) の解で $u(0) = u'(0) = 0$ を満たす.

定理の証明のための準備をする. ふたつの連続関数 f, g に対して, 新しい関数 $f * g$ を

$$(f * g)(x) = \int_0^x f(x-t)g(t)dt$$

と定める. $f * g$ を f と g の **畳み込み** という. これを使うと, (2) は $u(x) = (G * f)(x)$ と書くことが出来る.

畳み込みについて次が成り立つ.

- (1) $(f_1 * f_2) * g = f_1 * g + f_2 * g$
- (2) $(kf) * g = f * (kg) = kf * g \quad (k \in \mathbb{R})$
- (3) $f * g = g * f$
- (4) $(f * g) * h = f * (g * h)$
- (5) $f * g = 0$ ならば, $f = 0$ または $g = 0$.

定理の証明. 常微分方程式の解の存在と一意性より, (1) の解 u で $u(0) = u'(0) = 0$ を満たすものがただ一つある. それを u とする. u が (2) であることを示す.

$$v = u' - \beta u \quad (3)$$

とおくと, v は

$$v' - \alpha v = f(x), \quad v(0) = 0 \quad (4)$$

を満たす. そこでまず, (4) の解を求める. (4) は一階線形微分方程式なので, まず, $v' - \alpha v = 0$ を解くと, $v = Ce^{\alpha x}$ (C は定数). そこで今度は, $v = C(x)e^{\alpha x}$ の形の (4) の解を探す. $v = C(x)e^{\alpha x}$ を (4) の左辺に代入すると

$$v' - \alpha v = C'(x)e^{\alpha x}.$$

これと (4) を比べて,

$$\begin{aligned} C'(x) &= e^{-\alpha x} f(x). \\ C(x) &= \int_0^x e^{-\alpha t} f(t) dt. \end{aligned}$$

(ここで, $v(0) = 0$ に注意する.) よって, (4) の解は

$$v(x) = e^{\alpha x} \int_0^x e^{-\alpha t} f(t) dt = \int_0^x e^{\alpha(x-t)} f(t) dt = (e^{\alpha x} * f)(x).$$

また, (3) より求める u は

$$u' - \beta u = v = (e^{\alpha x} * f)(x), \quad u(0) = 0 \quad (5)$$

を満たすので (5) は (4) と同様に解くことができ, 解は

$$u = (e^{\beta x} * v)(x) = (e^{\beta x} * (e^{\alpha x} * f))(x) = ((e^{\beta x} * e^{\alpha x}) * f)(x).$$

よって, $(e^{\beta x} * e^{\alpha x})(x) = G(x)$ を示せばよい.

$$\begin{aligned} (e^{\beta x} * e^{\alpha x})(x) &= \int_0^x e^{\beta(x-t)} e^{\alpha t} dt \\ &= e^{\beta x} \int_0^x e^{(\alpha-\beta)t} dt \\ &= \begin{cases} \frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{\alpha - \beta} & \alpha \neq \beta \\ xe^{\alpha x} & \alpha = \beta. \end{cases} \\ &= G(x). \end{aligned}$$

注 1 定理は, 一般の $f(x)$ に対して (1) の特解を一つ与える. しかし, 具体的な $f(x)$ が与えられたときにこの方法で特解を求めるのは, 一般には, 計算が煩雑であり有効ではないことが多い.