微分方程式・演習問題No.8

2010年12月17日（金）

このプリントは, Oh-o! Meijiシステム（URL: http://oh-o.meiji.ac.jp）のクラス・ウェブ内のページ**理工学部１部　微分方程式　吉田尚彦兼任講師（金）１，４時限目後期**からもダウンロードできます（メニューバーの資料に置いてあります．ファイル名：ensyu8.pdf）．質問等は **takahiko@math.meiji.ac.jp** まで．

定数係数２階線形微分方程式の特解の発見法

定数係数２階線形微分方程式の非同次方程式

$$y'' + py' + qy = f(x) \quad (p, q \text{ は定数}) \tag{1}$$

を考える．

定理 1 u が (1) の解である（つまり，u が (1) を満たす）とする．

(i) z が (1) の右辺を 0 に置き換えた同次方程式

$$y'' + py' + qy = 0 \tag{2}$$

の解であるとする．このとき，$y = u + z$ とおくと y は (1) の解になる．

(ii) y が (1) の解であるとする．このとき，$z = y - u$ とおくと z は (2) の解になる．

つまり，(1) の一般解について次が成り立つ

$$(1) \text{ の一般解} = u + (2) \text{ の一般解}.$$

したがって，(1) の一般解を求めるには (1) の解を 1 つ見つければよい．この 1 つの解を**特解**と呼ぶ．以下では，右辺の $f(x)$ が特別な形をしている場合について特解の発見方法を説明する．

特別な場合の特解の発見法１

特解の発見法 1

(1) において，

$$f(x) = (x \text{ の } n \text{ 次多項式 } (n \geq 0)) \times e^{\alpha x}$$

とする．このとき，α が $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ の m 重根*ならば, (1) は

$$y = (x \text{ の } n \text{ 次多項式}) \times x^m e^{\alpha x}$$

の形の特解を持つ．

---

*$m = 0 \Leftrightarrow \alpha$ は $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ の根ではない
$m = 1 \Leftrightarrow \alpha$ は $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ の単根（異なる二つの根の内の一つ）
$m = 2 \Leftrightarrow \alpha$ は $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ の重根

例題 11 次の微分方程式の一般解を求めよ．

$$(1)\ y'' - 6y' + 8y = x^2 \quad (2)\ y'' - 3y' + 2y = e^{2x} \quad (3)\ y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$$

解． (1)$L[y] = y'' - 6y' + 8y$ とおく．まず同次方程式 $L[y] = 0$ の一般解を求める．特性根は $0 = \lambda^2 - 6\lambda + 8 = (\lambda - 2)(\lambda - 4)$ より $\lambda = 2, 4$．よって，$L[y] = 0$ の一般解は

$$y = Ae^{2x} + Be^{4x} \text{ （}A, B\text{：任意定数）}.$$

次に，非同次方程式 $L[y] = x^2$ の特解を求める．これは特解の発見法 1 において $n = 2$，$\alpha = 0$ に該当．$\alpha = 0$ は特性根ではないので，$m = 0$．よって，$y = ax^2 + bx + c$ の形の特解があるはず．これを $L[y]$ へ代入すると

$$L[y] = 2a - 6(2ax + b) + 8(ax^2 + bx + c) = 8ax^2 + (-12a + 8b)x + 2a - 6b + 8c.$$

これと (1) の右辺を比べて

$$8a = 1,\ -12a + 8b = 0,\ 2a - 6b + 8c = 0. \ \therefore\ a = \frac{1}{8},\ b = \frac{3}{16},\ c = \frac{7}{64}.$$

よって，特解は

$$y = \frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{16}x + \frac{7}{64}.$$

以上より (1) の一般解は

$$y = \frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{16}x + \frac{7}{64} + Ae^{2x} + Be^{4x} \text{ （}A, B\text{：任意定数）}.$$

(2)$L[y] = y'' - 3y' + 2y$ とおく．まず同次方程式 $L[y] = 0$ の一般解を求める．特性根は $0 = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$ より $\lambda = 1, 2$．よって，$L[y] = 0$ の一般解は

$$y = Ae^{x} + Be^{2x} \text{ （}A, B\text{：任意定数）}.$$

次に，非同次方程式 $L[y] = e^{2x}$ の特解を求める．これは特解の発見法 1 において $n = 0$，$\alpha = 2$ に該当．$\alpha = 2$ は特性方程式の異なる 2 つの解のうちの 1 つなので，$m = 1$．よって，$y = axe^{2x}$ の形の特解があるはず．これを $L[y]$ へ代入すると

$$L[y] = ae^{2x}.$$

これと (2) の右辺を比べて

$$a = 1.$$

よって，特解は

$$y = xe^{2x}.$$

以上より (2) の一般解は

$$y = xe^{2x} + Ae^{x} + Be^{2x}\ （A, B：任意定数）.$$

(3) $L[y] = y'' - 4y' + 4y$ とおく．まず同次方程式 $L[y] = 0$ の一般解を求める．特性根は $0 = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2$ より $\lambda = 2$ を重根にもつ．よって，$L[y] = 0$ の一般解は

$$y = Ae^{2x} + Bxe^{2x}\ （A, B：任意定数）.$$

次に，非同次方程式 $L[y] = e^{2x}$ の特解を求める．これは特解の発見法 1 において $n = 0$，$\alpha = 2$ に該当．$\alpha = 2$ は特性方程式の重根なので，$m = 2$．よって，$y = ax^2e^{2x}$ の形の特解があるはず．これを $L[y]$ へ代入すると

$$L[y] = 2ae^{2x}.$$

これと (3) の右辺を比べて

$$a = \frac{1}{2}.$$

よって，特解は

$$y = \frac{1}{2}x^2e^{2x}.$$

以上より (3) の一般解は

$$y = \frac{1}{2}x^2e^{2x} + Ae^{2x} + Bxe^{2x}\ （A, B：任意定数）.$$

問題 17 次の微分方程式の一般解を求めよ．

(1) $y'' + 2y' + y = x^2$ (2) $y'' - 2y' = 1 + x$ (3) $y'' + 2y' + y = e^{-x}$

特別な場合の特解の発見法 2

特解の発見法 2

(1) において，

$$f(x) = (x \text{ の } n \text{ 次多項式 } (n \geq 0)) \times e^{ax} \times \cos bx\ (\text{または } \sin bx)\ (a, b \in \mathbb{R})$$

とする．このとき，$a + \sqrt{-1}b$ が $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ の m 重根ならば, (1) は

$$y = (x \text{ の } n \text{ 次多項式}) \times x^m e^{ax} \times (A\cos bx + B\sin bx)$$

の形の特解を持つ.

例題 12 微分方程式 $y'' - 6y' + 9y = \cos x$ の一般解を求めよ．

解. $L[y]=y''-6y'+9y$ とおく．まず同次方程式 $L[y]=0$ の一般解を求める．特性根は $0=\lambda^2-6\lambda+9=(\lambda-3)^2$ より 2 重根 $\lambda=3$ を持つ．よって，一般解は

$$y=Ae^{3x}+Bxe^{3x}\ (A,B：\text{任意定数}).$$

次に，非同次方程式 $L[y]=\cos x$ の特解を求める．これは特解の発見法 2 において $n=0$，$a=0$，$b=1$ に該当．$a+\sqrt{-1}b=\sqrt{-1}$ は特性根ではないので，$m=0$．よって，$y=C\cos x+D\sin x$ の形の特解があるはず．これを $L[y]$ へ代入すると

$$L[y]=(8C-6D)\cos x+(8D+6C)\sin x.$$

これと $L[y]=\cos x$ の右辺を比べて

$$8C-6D=1,\ 8D+6C=0.\ \therefore\ C=\frac{2}{25},\ D=-\frac{3}{50}.$$

よって，特解は

$$y=\frac{2}{25}\cos x-\frac{3}{50}\sin x.$$

以上より $L[y]=\cos x$ の一般解は

$$y=\frac{2}{25}\cos x-\frac{3}{50}\sin x+Ae^{3x}+Bxe^{3x}\ (A,B：\text{任意定数}).$$

問題 18 次の微分方程式の一般解を求めよ．

(1) $y''-3y'+2y=\sin x$　(2) $y''+y=\cos x$