

微分方程式・演習問題 No.5

2010年10月29日(金)

このプリントは、Oh-o! Meiji システム (URL: <http://oh-o.meiji.ac.jp>) のクラス・ウェブ内のページ **工学部1部 微分方程式 吉田尚彦兼任講師(金) 1, 4 時限目後期**からもダウンロードできます (メニューバーの資料に置いてあります. ファイル名: ensyu5.pdf). 質問等は takahiko@math.meiji.ac.jp まで.

変数分離形微分方程式の応用

冷却の問題

物体 A を空気中 (または水中) に放置したときの A の温度変化を見る. 時刻 t のときの A の温度を $T(t)$, 気温 (または水温) を $T_m(t)$ とすると, $T(t)$ の時間変化の割合 $\frac{dT}{dt}(t)$ は A の温度と気温 (または水温) の差 $T(t) - T_m(t)$ に比例することが知られている, つまり

$$\frac{dT}{dt}(t) = k(T(t) - T_m(t)) \quad (k \text{ は比例定数}) \quad (1)$$

が成り立つ. ここで k は物体 A や空気 (または水) に依存する量である.

例題 8 温度 100°C の銅球を水温 30°C の水中にいたら, 3分後に銅球の温度は 70°C になった. 水温は一定であるとして次の問に答えよ.

(1) 水中に入れてから銅球の温度が 35°C にあるのは何分後か? 但し, $\log 2 = 0.7$, $\log 7 = 1.9$ としてよい.

(2) 6分後の銅球の温度を求めよ.

解. 銅球を水に入れた時刻を $t = 0$ とし, 時刻 t での銅球の温度を $T(t)$ とすると (1) より

$$\frac{dT}{dt}(t) = k(T(t) - 30) \quad (2)$$

$$T(0) = 100 \quad (3)$$

$$T(3) = 70 \quad (4)$$

が成り立つ.

(i) まず, (2) を解く. 全ての t で $T(t) \neq 30$ の時は, $\frac{1}{T(t)-30} \frac{dT}{dt}(t) = k$ の両辺を t で積分すると

$$\log|T(t) - 30| = kt + C_1 \quad (C_1 \text{ は任意定数})$$

$$\therefore T(t) = 30 + C_2 e^{kt} \quad (C_2 \text{ は } 0 \text{ 以外の任意定数}). \quad (5)$$

次に, ある $t = t_0$ で $T(t_0) = 30$ となるような (2) の解を探すと, まず定数関数 $T(t) = 30$ はこれを満たすということが分かる. 一方, 常微分方程式の階の存在と一意性から (詳しくは, テキスト 5.11 初期値問題の基礎理論を参照), ある $t = t_0$ で $T(t_0) = 30$ となるような (2) の解は定数関数 $T(t) = 30$ のみ. これは (5) で $C_2 = 0$ としたものの. 以上まとめて, (2) の解は

$$T(t) = 30 + C_2 e^{kt} \quad (C_2 \text{ は任意定数}).$$

(ii) このなかで (3) を満たすものを探すと,

$$100 = 30 + C_2 \Rightarrow C_2 = 70.$$

(iii) さらに (4) より

$$70 = 30 + 70e^{3k} \Rightarrow e^{3k} = \frac{4}{7} \Rightarrow k = \frac{1}{3} \log \frac{4}{7} = \frac{1}{3}(2 \log 2 - \log 7).$$

以上より

$$T(t) = 30 + 70e^{kt} \quad (\text{但し } k = \frac{1}{3}(2 \log 2 - \log 7)). \quad (6)$$

(1) の解. (6) より

$$35 = 30 + 70e^{kt} \Rightarrow t = \frac{\log \frac{1}{14}}{k} = \frac{3(-\log 2 - \log 7)}{2 \log 2 - \log 7} = 15.6. \quad \therefore 15.6 \text{ 分後.}$$

(2) の解. (6) より

$$T(6) = 30 + 70(e^{3k})^2 = 30 + 70\left(\frac{4}{7}\right)^2 = 52.85\dots \therefore 52.9^\circ\text{C}.$$

問題 12 10°C の物体を気温 20°C の外気中に放置したら, 5 分後にその物体の温度が 12°C になった. 気温は一定であるとして次の間に答えよ.

- (1) その物体が 15°C になるまでにかかる時間を求めよ. 但し, $\log 2 = 0.7$, $\log 0.8 = -0.2$ としてよい.
- (2) 20 分後にその物体の温度は何度になるか?

増殖崩壊の問題

例題 9 ある放射性物質 A は現在量に比例する割合で崩壊する. (つまり, A の量の時間変化の割合は現在量に比例する.) その物質が初め 50 mg 存在しており, 2 時間後に初め存在していた量の 10% が失われた. 次の間に答えよ.

- (1) 4 時間後に存在している量を求めよ.
- (2) はじめに存在していた量から半分になるまでの時間 (半減期という) を求めよ. ただし, $\log 2 = 0.7$, $\log 0.9 = -0.1$ としてよい.

解. 時刻 t での A の量を $N(t)$ とすると, 次が成り立つ.

$$\frac{dN}{dt}(t) = kN(t) \quad (k \text{ は比例定数}), \quad N(0) = 50$$

これを先の問題と同様に解くと

$$N(t) = 50e^{kt}.$$

ここで, 2 時間後に 50 mg の 10% が失われた, つまり 45 mg になったので

$$45 = 50e^{2k} \Rightarrow e^{2k} = 0.9 \Rightarrow k = \frac{1}{2} \log 0.9.$$

(1) の解.

$$N(4) = 50e^{4k} = 50(e^{2k})^2 = 50\left(\frac{9}{10}\right)^2 = 40.5. \quad \therefore 40.5 \text{ mg}.$$

(2) の解.

$$25 = 50e^{kt} \Rightarrow t = \frac{1}{k} \log \frac{1}{2} = 14. \quad \therefore 14 \text{ 時間後.}$$

問題 13 ある化学反応で 1 つの物質が他の物質に変化するとき, 変化する量の時間変化の割合は, 変化しないで残っている量に比例する. この物質が 1 時間後に 48 g 残り, 3 時間後に 12 g 残った. 最初にあった量を求めよ.