微分方程式・演習問題No.4

このプリントは, Oh-o! Meiji システム（URL: http://oh-o.meiji.ac.jp）のクラス・ウェブ内のページ**理工学部　微分方程式　吉田尚彦兼任講師（金）１，４時限目後期**からもダウンロードできます（メニューバーの資料に置いてあります．ファイル名：ensyu4.pdf）．質問等は **takahiko@math.meiji.ac.jp** まで．

変数分離形の解法

x を変数とする関数 y について，微分方程式

$$y' = f(x)g(y) \quad (\text{但し，} f(x),\ g(y) \text{ は } C^1 \text{ 級の関数}) \tag{1}$$

を変数分離形という．

例 2 $y' = \frac{x^2}{y^2}$ は変数分離形．対応する $f(x)$，$g(y)$ はそれぞれ $f(x) = x^2$，$g(y) = \frac{1}{y^2}$．

例 3 $y' = ay$（ただし a は定数）は変数分離形．対応する $f(x)$，$g(y)$ はそれぞれ $f(x) = a$，$g(y) = y$．

変数分離形微分方程式 (1) の C^1 級の解 $y = h(x)$ を求めよう．

まず，$g(y) \neq 0$ のときを考える．正確には，y は x についての関数 $y = h(x)$ なので，どんな x についても $g(y) = g(h(x)) \neq 0$ であるような (1) の解 $y = h(x)$ を探そう．$g(y) \neq 0$ より，(1) の両辺を $g(y)$ で割り，積分すると

$$\int \frac{1}{g(y)} dy = \int \frac{1}{g(y)} \frac{dy}{dx} dx = \int f(x) dx \tag{2}$$

となる．そこで，$F(x)$，$G(y)$ をそれぞれ $f(x)$，$\frac{1}{g(y)}$ の原始関数とすると，(2) は

$$G(y) = F(x) + C \quad (C \text{ は積分定数}) \tag{3}$$

と書ける．さらに $\frac{dG}{dy} = \frac{1}{g(y)} \neq 0$ より，$G(y)$ は逆関数 G^{-1} をもつ．つまり，(3) は y について解くことができ，結局，(1) の解は

$$y = G^{-1}\left(F(x) + C\right)$$

となる．

次に，$g(y) = 0$ となる y の値があるときを考える．仮にそのような値を y_0 とする．このとき，y_0 を値に取るような（つまり，ある $x = x_0$ で $y = h(x_0) = y_0$ となるような）(1) の解 $y = h(x)$ を探そう．すぐに分かるのは定数関数 $y = y_0$ はそのような解である．さらに，このような解が他にあるかどうかを考えると，実は，これ以外に（C^1 級の）解はないことが次の事実から分かる（詳しくは，テキスト p. 185，系 5.55 を参照.）．

常微分方程式の解の存在と一意性

一般に，微分方程式 $y' = F(x, y)$（ここで F は C^1 級の関数）の C^1 級の解 $y = h(x)$ で，初期条件 “$x = x_0$ のとき，$y_0 = h(x_0)$” を満たすものはただ 1 つだけ存在する．

実際，関数 $y = k(x)$ が $y_0 = k(x_0)$ を満たす (1) の解ならば，定数関数 $y = y_0$ もそのような解なので，上の事実から，これらは一致しなければならない．

以上，まとめると次のようになる．

変数分離形微分方程式の解

変数分離形微分方程式 (1) の C^1 級の解は，

$$y = G^{-1}\left(F(x) + C\right), \tag{4}$$

$$y = y_0. \tag{5}$$

ここで，$F(x)$，$G(y)$ はそれぞれ $f(x)$，$\frac{1}{g(y)}$ の原始関数，C は積分定数．y_0 は $g(y) = 0$ を満たす y の値．

注 1 解 (4) を (1) の**一般解**という．解 (5) はしばしば (4) に含まれる．そうでない場合，(5) を**特異解**という．

注 2 $g(y) = 0$ となる y の値が複数ある場合，例えば，$y_0, \ldots, y_n$ をそのような値をすると，n 個の定数関数 $y = y_0, \ldots, y = y_n$ も全て (1) の解である．

例 4 $y' = \frac{x^2}{y^2}$ を解いてみよう．両辺に y^2 をかけて x について積分すると

$$\int y^2 dy = \int y^2 \frac{dy}{dx} dx = \int x^2 dx.$$

これより，$y^3 = x^3 + C$（C は任意定数）を得る．y について解くと，$y = (x^3 + C)^{\frac{1}{3}}$．

例 5 $y' = ay$（a は定数）を解いてみよう．まず，$y \neq 0$ のときを考える（正確には，y は x についての関数 $y = h(x)$ なので，どんな x についても $h(x) \neq 0$ であるような $y' = ay$ の解 $y = h(x)$ を探そう）．両辺を y で割って x について積分すると

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} dx = \int a dx.$$

これより $\log|y| = ax + C'$（C' は任意定数）を得る．よって，$y = \pm e^{C'} e^{ax}$．ここで，$\pm e^{C'}$ は 0 以外の値をとりうる任意定数である．$C = \pm e^{C'}$ とおけば，

$$y = Ce^{ax} \text{（ただし } C \text{ は 0 以外の任意定数）} \tag{6}$$

を得る．

次に，0 を値にとるような $y' = ay$ の解を探すと，先の議論によって，そのような解は定数関数 $y \equiv 0$ のみ．これは，(6) において $C = 0$ としたもの．

以上まとめると，$y' = ay$ の解は

$$y = Ce^{ax} \text{（ただし } C \text{ は任意定数）}$$

となる．

問題 11 次の微分方程式を解け．

$$\text{(1) } y' = -\frac{y}{x} \quad \text{(2) } y' = \frac{y^2}{x} \quad \text{(3) } y' = \frac{y^2 - 1}{2x} \quad \text{(4) } y' = \sqrt{y - 1}$$