微分方程式・演習問題No.3

このプリントは, Oh-o! Meiji システム（URL: http://oh-o.meiji.ac.jp）のクラス・ウェブ内のページ**理工学部　微分方程式　吉田尚彦兼任講師（金）１，４時限目後期**からもダウンロードできます（メニューバーの資料に置いてあります．ファイル名：ensyu3.pdf）．質問等は **takahiko@math.meiji.ac.jp** まで．

微分方程式に含まれる最高階の導関数の階数をその微分方程式の**階数**という．

例 1　（１）$\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y}$ は 1 階の微分方程式である．
（２）$\dfrac{d^2y}{dx^2} = -g$ は 2 階の微分方程式である．

この講義では特に断らない限り，独立変数を x で，未知関数を y で表す．n 階の微分方程式は一般に

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \ (F \text{ は既知の関数})$$

と表せる．その中で特に，

$$y^{(n)} = G(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n-1)}) \ \ (G \text{ は既知の関数})$$

の形をしているものを**正規形**の微分方程式という．ここで，$y' = \dfrac{dy}{dx}$，$y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$，…，$y^{(n)} = \dfrac{d^ny}{dx^n}$ である．

例題 5 微分方程式 $x^2y'' + yy' = 3x$ の階数を示し，可能なものについては正規形に直せ．

解：$x^2y'' + yy' = 3x$ は 2 階の微分方程式である．これを y'' について解くと

$$\therefore \ \ y'' = \frac{3x - yy'}{x^2} = \frac{3}{x} - \frac{yy'}{x^2}.$$

問題 8 次の微分方程式の階数を示し，可能なものについては正規形に直せ．

$$(1)\ {y'}^2 - y^2 - \log(1 + x^2) = 0 \ \ (2)\ yy''' = (y'')^2 \ \ (3)\ (x^2y')' + 4x^2y = 0$$

例題 6 関数 $y = x^3 + x^2 + x + 1$ が，微分方程式 $y^{(4)} = 0$ を満たす事を確かめよ．

解.

$$y' = 3x^2 + 2x + 1, \ \ y'' = 6x + 2, \ \ y''' = 6, \ \ \therefore\ y^{(4)} = 0.$$

問題 9 次の関数 y が与えられた微分方程式を満たす事を確かめよ．ここで a，b は定数である．

(1)　$y = x(a - \cos x), \quad xy' - y = x^2 \sin x$

(2)　$y = a^{-1} \cosh ax + b, \quad y'' = a\sqrt{1 + (y')^2}$

例題 7 $\dfrac{df}{dx}(x) = 0$ ならば $f(x) = C$（C は任意定数）であることを用いて，微分方程式 $xy' + y - 1 = 0$ の一般解を求めよ．

解.

$$0 = xy' + y - 1 = \frac{d}{dx}(xy - x) \ \Rightarrow\ xy - x = C \ \ \therefore y = \frac{x+C}{x} = 1 + \frac{C}{x}.$$

問題 10 $\dfrac{df}{dx}(x) = 0$ ならば $f(x) = C$（C は任意定数）であることを用いて，次の微分方程式の一般解を求めよ．

$$(1)\quad xy'' + y' - x = 0 \quad (2)\quad x^2y'' + 4xy' + 2y = 0$$