

## 微分方程式・演習問題 No.2

このプリントは, Oh-o! Meiji システム (URL: <http://oh-o.meiji.ac.jp>) のクラス・ウェブ内のページ **工学部1部 微分方程式 吉田尚彦兼任講師 (金) 1, 4時限目後期** からダウンロードできます (メニューバーの資料に置いてあります. ファイル名: ensyu2.pdf). 質問等は [takahiko@math.meiji.ac.jp](mailto:takahiko@math.meiji.ac.jp) まで.

### 積分法の復習

関数  $f(x)$  に対し, 導関数が  $f(x)$  となるような関数を  $f(x)$  の **原始関数** と呼び  $\int f(x)dx$  と表す.  $f(x)$  の原始関数を求めることを  $f(x)$  を **積分する** という.

——— 積分の性質 ———

積分について次が成り立つ

$$\begin{aligned}\int cf(x)dx &= c \int f(x)dx \quad (c \text{ は定数}), \\ \int (f(x) + g(x))dx &= \int f(x)dx + \int g(x)dx, \\ \int f(u)du &= \int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx, \quad u = \varphi(x) \quad (\text{置換積分}), \\ \int f'(x)g(x)dx &= f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx \quad (\text{部分積分}).\end{aligned}$$

**例題 2 (置換積分)**  $\int \frac{x}{1+x^2} dx$  を求めよ.

解.

$$\int \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{(1+x^2)'}{1+x^2} dx \tag{1}$$

より  $u = 1 + x^2$  とおけば

$$(1) = \frac{1}{2} \int \frac{1}{u} \frac{du}{dx} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{u} du = \frac{1}{2} \log u + C = \frac{1}{2} \log(1+x^2) + C.$$

**問題 5** 次の不定積分を求めよ.

$$(1) \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad (2) \int \tan x dx \quad (3) \int \frac{dx}{x^2-6x+13}$$

**例題 3 (部分積分)**  $\int \log x dx$  を求めよ.

解.

$$\int \log x dx = \int (x)' \log x dx = x \log x - \int x(\log x)' dx = x \log x - x.$$

**問題 6** 次の不定積分を求めよ.

$$(1) \int e^x \sin x dx \quad (2) \int \sin^{-1} x dx$$

**例題 4 (有理関数の積分)**  $\int \frac{1}{1-x^2} dx$  を求めよ.

解.

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{(1-x)(1+x)} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} \right)$$

より

$$\int \frac{1}{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{1-x} dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+x} dx = -\frac{1}{2} \log |1-x| + \frac{1}{2} \log |1+x| + C.$$

**問題 7** 次の不定積分を求めよ.

$$(1) \int \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{x^2 - x} dx \quad (2) \int \frac{dx}{x(x^2 + 1)}$$