

微分方程式・演習問題 No.1

このプリントは, Oh-o! Meiji システム (URL: <http://oh-o.meiji.ac.jp>) のクラス・ウェブ内のページ **工学部 1 部 微分方程式 吉田尚彦兼任講師 (金) 1, 4 時限目後期** からダウンロードできます (メニューバーの資料に置いてあります. ファイル名: ensyu1.pdf). 質問等は **takahiko@math.meiji.ac.jp** まで.

微分法の復習

1 変数関数 f について, 極限

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

が存在する時, f は点 $x = a$ において **微分可能** であるといい, $f'(a)$ を f の点 $x = a$ における **微分係数** と言う. また, 関数 f が定義された各点 x で微分可能な時, 各点 x にその点における微分係数 $f'(x)$ を対応させる関数を **導関数** といい, f' , $\frac{df}{dx}$ などと表す.

微分の性質

f, g を微分可能な関数, c を定数とする.

(1) 次が成り立つ

$$(cf)'(x) = cf'(x),$$

$$(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x),$$

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \text{ (積の微分法)},$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2} \text{ (商の微分法)}.$$

(2) 合成関数 $g \circ f$ が考えられる時, $g \circ f$ も微分可能で次が成り立つ

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) f'(x) \text{ (合成関数の微分法)}.$$

(3) 関数 f が微分可能な逆関数 f^{-1} をもつならば,

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} \text{ 但し } y = f(x) \text{ (逆関数の微分法)}.$$

問題 1 指数関数は, $(e^x)' = e^x$ を満たす. これを用いて, 対数関数 $y = \log x$ ($x > 0$) が $y' = (\log x)' = \frac{1}{x}$ を満たす事を示せ.

問題 2 次の関数の導関数を求めよ.

$$(1) x \log x - x \quad (2) xe^x \quad (3) x \sin x \quad (4) \frac{x}{\sin x} \quad (5) e^{x^2} \quad (6) a^x \ (a > 0)$$

例題 1 (逆三角関数) $-1 \leq x \leq 1$ を満たす任意の x に対して

$$x = \sin y \text{ かつ } -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2} \quad (1)$$

となる y がただ 1 つある. $-1 \leq x \leq 1$ なる x に (1) を満たす y を対応させる関数を $\sin^{-1}$ (または $\arcsin$) と表す. $\sin^{-1} x$ の導関数を求めよ.

解: $y = \sin^{-1} x$ とおく. $y = \sin^{-1} x \Leftrightarrow x = \sin y$ かつ $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ より $x = \sin y$ の両辺を x で微分すると $1 = y' \cos y$. ここで $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ より $\cos y \geq 0$ に注意すると $\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y}$ と書ける. これと $x = \sin y$ を用いると

$$1 = y' \cos y = y' \sqrt{1 - x^2} \quad \therefore y' = (\sin^{-1} x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

問題 3 $-1 \leq x \leq 1$ を満たす任意の x に対して

$$x = \cos y \text{ かつ } 0 \leq y \leq \pi$$

を満たす y (これはただ 1 つ) を対応させる関数を $\cos^{-1}$ (または $\arccos$) と表す. $\tan$ についても同様に, 任意の x について

$$x = \tan y \text{ かつ } -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$$

を満たす y (これもただ一つ) を対応させる関数を $\tan^{-1}$ (または $\arctan$) と表す. 次の関数の導関数を求めよ.

$$(1) \cos^{-1} x \quad (2) \tan^{-1} x \quad (3) \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) \quad (a > 0)$$

問題 4 (双曲線関数) 双曲線関数 $\sinh$, $\cosh$, $\tanh$ を以下で定める

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}.$$

双曲線関数の導関数 $\sinh'(x)$, $\cosh'(x)$, $\tanh'(x)$ を求めよ.