

幾何学特論C レポート課題

2017 年 6 月 12 日 (月)

このプリントは, Oh-o! Meiji システム (URL: <http://oh-o.meiji.ac.jp>) のクラス・ウェブ内のページ大学院 (博前) 理工学研究科 幾何学特論 C 吉田尚彦専任講師 春学期/月曜/3 限からもダウンロードできます (ファイル名: report.pdf). 質問等は takahiko@meiji.ac.jp まで.

以下の問題を全て解答し, A4 レポート用紙にまとめて 2017 年 7 月 21 日 (金) 16 時までに数学科資料室 (第二校舎 6 号館 6607 室) にあるレポート提出用ポストに提出すること. なお, 解答をレポートにまとめる際, 結論だけでなく途中の説明も記すこと.

問題 1 多様体 M 上のベクトル場 X が M の 1 パラメータ変換群 $\{\varphi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ によって定義されているとする. このとき, M 上の p 次微分形式 ω ($p > 0$) と p 個のベクトル場 $X_1, \dots, X_p$ について次の関係式を示せ. M の各点 x において

$$(\mathcal{L}_X \omega)_x((X_1)_x, \dots, (X_p)_x) = \frac{d}{dt} \{(\varphi_t^* \omega)_x((X_1)_x, \dots, (X_p)_x)\} \Big|_{t=0}$$

問題 2 M を n 次元多様体, U, V を M の開集合で $M = U \cup V$ を満たすものとする. 任意の非負整数 $k \geq 0$ に対して, 線型写像 $\iota: H^k(M; \mathbb{R}) \rightarrow H^k(U; \mathbb{R}) \oplus H^k(V; \mathbb{R})$ と $p: H^k(U; \mathbb{R}) \oplus H^k(V; \mathbb{R}) \rightarrow H^k(U \cap V; \mathbb{R})$ をそれぞれ

$$\begin{aligned} \iota([\omega]) &:= ([\omega|_U], [\omega|_V]) & ([\omega] \in H^k(M; \mathbb{R})), \\ p([\eta], [\zeta]) &:= [\zeta|_{U \cap V} - \eta|_{U \cap V}] & ([\eta], [\zeta]) \in H^k(U; \mathbb{R}) \oplus H^k(V; \mathbb{R}) \end{aligned}$$

で定義する. また, 線型写像 $\delta: H^k(U \cap V; \mathbb{R}) \rightarrow H^{k+1}(M; \mathbb{R})$ を講義で定義したものとする. このとき, $\delta: H^k(U \cap V; \mathbb{R}) \rightarrow H^{k+1}(M; \mathbb{R})$ が *well-defined* であり, 任意の非負整数 $k \geq 0$ に対して, $\text{Im } p = \ker \delta$, $\text{Im } \delta = \ker \iota$ が成り立つことを示せ.

問題 3 n を 1 以上の整数とする. $S^n := \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\}$ の開集合 U と V をそれぞれ

$$U := \left\{ (x_1, \dots, x_{n+1}) \in S^n \mid x_{n+1} < \frac{1}{2} \right\}, \quad V := \left\{ (x_1, \dots, x_{n+1}) \in S^n \mid x_{n+1} > -\frac{1}{2} \right\}$$

とおく. 次の問に答えよ.

- (1) U と V がともに可縮であることを示せ.
- (2) $U \cap V$ が $\{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in S^n \mid x_{n+1} = 0\}$ とホモトピー同値であることを示せ.
- (3) *Meyer-Vietoris* 完全系列を用いて, S^n の *de Rham* コホモロジーを計算せよ.