

幾何学特論C レポート課題

2016 年 6 月 6 日 (月)

このプリントは, Oh-o! Meiji システム (URL: <http://oh-o.meiji.ac.jp>) のクラス・ウェブ内のページ大学院 (博前) 理工学研究科 幾何学特論 C 吉田尚彦専任講師 春学期 / 月曜 / 2 限からもダウンロードできます (ファイル名 : report2016.pdf) . 質問等は takahiko@meiji.ac.jp まで .

以下の問題を全て解答し , A4 レポート用紙にまとめて 2016 年 7 月 22 日 (金) 16 時までに数学科資料室 (第二校舎 6 号館 6607 室) にあるレポート提出用ポストに提出すること . なお , 解答をレポートにまとめる際 , 結論だけでなく途中の説明も記すこと .

問題 1 パラメータ表示

$$S(u, v) = (3u + 3uv^2 - u^3, v^3 - 3v - 3u^2v, 3u^2 - 3v^2)$$

で表される曲面の Gauss 曲率を求めよ .

問題 2 U を $\mathbb{R}^2$ の開集合とし , X を C^∞ 級写像

$$S(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (u, v) \in U$$

でパラメータ表示される曲面とする . $(u(t), v(t))$ を U の C^∞ 級曲線とすると , X の C^∞ 級曲線 $\gamma(t) := S(u(t), v(t))$ が測地線であるとは , 全ての t で $\frac{d^2\gamma}{dt^2}(t)$ が $\gamma(t)$ における X の法線ベクトルとなるときをいう . 次の問に答えよ .

(1) 曲面 X の第 1 基本形式の係数について $E = 1$, $F = 0$ が成り立つならば , X の C^∞ 級曲線 $\gamma(t) = S(u_0 + t, v_0)$ は測地線であることを示せ . ただし , $(u_0, v_0) \in U$ とする .

(2) 単位球面 $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ の曲線 $\gamma(t) = (\cos t \cos v, \cos t \sin v, \sin t)$ が測地線であることを示せ .

問題 3 U を $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v \leq 1\}$ とし , X をパラメータ表示

$$S(u, v) = (\cos u, \sin u, v), \quad (u, v) \in U$$

で表される曲面とする . このとき , X の測地線 $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ で $\gamma(0) = (1, 0, 0)$, $\gamma(1) = (-1, 0, 1)$ となるものを求めよ .