幾何学特論C レポート課題

2014 年 6 月 23 日（月）

このプリントは, Oh-o! Meiji システム（URL: http://oh-o.meiji.ac.jp）のクラス・ウェブ内のページ**大学院（博前）理工学研究科 幾何学特論 C 吉田尚彦専任講師 春学期／月曜／ 2 限**からもダウンロードできます（ファイル名：report2.pdf）．質問等は **takahiko@meiji.ac.jp** まで.

問題 3，4 を解答し，A4 レポート用紙にまとめて **2014 年 7 月 25 日（金）16 時**までに**数学科資料室（第二校舎 6 号館 6607 室）**にあるレポート提出用ポストに提出すること．なお，解答をレポートにまとめる際，結論だけでなく途中の説明も記すこと．

問題 3 D を $\mathbb{R}^2$ の領域とし，X を C^∞ 級写像

$$p(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)), \quad (u,v) \in D$$

でパラメータ表示される曲面とする．$(u(t), v(t))$ を D の C^∞ 級曲線とするとき，X の C^∞ 級曲線 $\gamma(t) := p(u(t), v(t))$ が測地線であるとは，全ての t で $\frac{d^2\gamma}{dt^2}(t)$ が $\gamma(t)$ における X の法線ベクトルとなるときをいう．次の問に答えよ．
(1) 曲面 X の第 1 基本形式の係数について $E = 1$，$F = 0$ が成り立つならば，X の C^∞ 級曲線 $\gamma(t) = p(u_0 + t, v_0)$ は測地線であることを示せ．ただし，$(u_0, v_0) \in D$ とする．
(2) 単位球面 $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1\}$ の曲線 $\gamma(t) = (\cos t \cos v, \cos t \sin v, \sin t)$ が測地線であることを示せ．

問題 4 X_1，X_2 をそれぞれ，パラメータ表示 $S_1 \colon U_1 \to X_1$，$S_2 \colon U_2 \to X_2$ で表される曲面とする．X_1 から X_2 への C^∞ 級写像 $\varphi \colon X_1 \to X_2$ が次の条件をみたすとき，φ は**共形写像**であるという：正の値をとる X_1 上の C^∞ 級関数 $\lambda \colon X_1 \to \mathbb{R}$ が存在し，全ての $p \in X_1$ と全ての ξ，$\eta \in T_pX_1$ に対して

$$\lambda(p)^2(\xi \cdot \eta) = \varphi_{*p}(\xi) \cdot \varphi_{*p}(\eta)$$

が成り立つ．ここで，$\xi \cdot \eta$ は ξ と η の内積とする．
(1) C^∞ 級写像 $\varphi \colon X_1 \to X_2$ に対して

$$(z(u,v), w(u,v)) = S_2^{-1} \circ \varphi \circ S_1(u,v)$$

とおく．このとき，φ が共形写像ならば

$$\lambda^2 \begin{pmatrix} E_1 & F_1 \\ F_1 & G_1 \end{pmatrix} = {}^t\begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial w}{\partial u} & \frac{\partial w}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_2 & F_2 \\ F_2 & G_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial w}{\partial u} & \frac{\partial w}{\partial v} \end{pmatrix}$$

が成り立つことを示せ．ただし，E_i，F_i，G_i（$i=1,2$）は X_i の第 1 基本形式の係数とする．
(2) X_1，X_2 がそれぞれ単位球面，円柱

$$X_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=1\}$$
$$X_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2=1\}$$

であり，それらのパラメータ表示が

$$S_1(u,v) = (\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u) \quad -\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}, \quad 0 < v < 2\pi$$
$$S_2(z,w) = (\cos w, \sin w, z) \quad 0 < w < 2\pi, \quad z \in \mathbb{R}$$

の場合を考える．$f(u)$ を $f(0)=0$ を満たす C^∞ 級関数とする．C^∞ 級写像 $\varphi\colon X_1 \to X_2$ を

$$\varphi\left(S_1(u,v)\right) = S_2\left(f(u), v\right)$$

で定義する．φ が共形写像であるとき，f を具体的に求めよ．