

幾何学3レポート課題

2017年6月6日(火)

このプリントは, Oh-o! Meiji システム (URL: <http://oh-2.meiji.ac.jp>) のクラス・ウェブ内のページ理工学部 幾何学3 吉田尚彦専任講師 (火) 3 時限目春学期からもダウンロードできます. 質問等は takahiko@meiji.ac.jp まで.

以下の問題を解答し, A4 レポート用紙にまとめて **2017年7月21日(金) 16時までに数学科資料室(第二校舎6号館6607室)**にあるレポート提出用ポストに提出すること. なお, 解答をレポートにまとめる際, 結論だけでなく途中の説明も記すこと.

問題 1 可縮な位相空間は弧状連結であることを示せ.

問題 2 $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間とし, $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ をそれぞれ X , Y の基点とする. このとき, $X \times Y$ の基本群 $\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0))$ から基本群の直積 $\pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$ への写像 $\varphi: \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \rightarrow \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$ を

$$\varphi([\gamma]) := ([p_X \circ \gamma], [p_Y \circ \gamma])$$

で定める. ここで, $X \times Y$ には直積位相を入れるものとし, p_X , p_Y はそれぞれ X , Y への自然な射影 $p_X: X \times Y \rightarrow X$, $p_Y: X \times Y \rightarrow Y$, つまり

$$p_X(x, y) := x, \quad p_Y(x, y) := y$$

とする. このとき, 次の問に答えよ.

- (1) φ が *well-defined* であることを示せ.
- (2) φ は群の準同型写像となることを示せ.
- (3) φ は群の同型写像であることを示せ.

問題 3 (1) n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ (ただし $n \geq 1$ とする) の任意の点 $p \in \mathbb{R}^n$ に対して, $\mathbb{R}^n \setminus \{p\}$ が $n-1$ 次元球面 S^{n-1} とホモトピー同値であることを示せ. ここで, $\mathbb{R}^n \setminus \{p\}$ には $\mathbb{R}^n$ の部分集合として誘導位相を考える.

(2) $\mathbb{R}^2$ と $\mathbb{R}^3$ は同相 (位相同型) ではないことを示せ.

問題 4 位相空間 $X := \{(x, y) \in [0, 1] \times [-1, 1] \mid x \in \mathbb{Z} \text{ または } y \in \mathbb{Z}\}$ の基本群を求めよ. ここで, X にはユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$ の部分集合として誘導位相を考える.