

幾何学3演習 No.7

2017年6月13日(火)

このプリントは, Oh-o! Meiji システム (URL: <http://oh-2.meiji.ac.jp>) のクラス・ウェブ内のページ理工学部 幾何学3 吉田尚彦専任講師(火)3時限目春学期からもダウンロードできます. 質問等は takahiko@meiji.ac.jp まで.

年 組 番 氏名

G, H を群とし, G, H の単位元をそれぞれ e_G, e_H と書くことにする.

定義 1 G と H の元を有限個並べた列を G と H の元を文字とする *word* といい, w, v などの記号で表す. また, 何も並んでいない空な列も便宜的に *word* と考え, e と表す.

例 1 $w = g_1, h_1, g_2, h_2, h_3$ ($g_i \in G, h_j \in H$), $v = g$ ($g \in G$), $e = “ ”$

word に関する次の2つの操作を考える.

- (I) $w = x_1, x_2, \dots, x_n$ (x_i は G または H の元) の前, 後ろ, 或いは文字の間に e_G または e_H を挿入する.
- (II) $w = x_1, x_2, \dots, x_n$ の中のとなり合う x_i, x_{i+1} でともに G (あるいは H) に属するものがあるれば, その x_i, x_{i+1} の部分を G (あるいは H) の積 $x_i \cdot x_{i+1}$ で置き換える.

G, H の元を文字とする *word* 全体の集合を $W(G, H)$ とする. このとき

定義 2 2つの *word* v と $w \in W(G, H)$ について, w に操作 (I), (II), またはその逆操作 (それぞれ (I)⁻¹, (II)⁻¹ と表す) を有限回施すと v に変換できるとき, $w \sim v$ と表すことにする.

例 2

$$w = e_G, h_1, g_1, h_2, h_2^{-1} \xrightarrow{(I)^{-1}} h_1, g_1, h_2, h_2^{-1} \xrightarrow{(II)} h_1, g_1, h_2 \cdot h_2^{-1} = h_1, g_1, e_H \xrightarrow{(I)^{-1}} h_1, g_1$$

より, $w \sim h_1, g_1$

問題 11 (1) 関係 $\sim$ は $W(G, H)$ の同値関係であることを示せ.

(2) 商集合 $W(G, H)/\sim$ に積を

$$[x_1, x_2, \dots, x_m] \cdot [y_1, y_2, \dots, y_n] := [x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n]$$

と定める. このとき, 積が代表元の取り方に依らないで定まることを示せ. また, この積に関して $W(G, H)/\sim$ が群になることを示せ.