

幾何学3演習 No.6 略解

2017 年 6 月 20 日 (火)

問題 10 任意の $\gamma \in \Omega(S^1, 1, 1)$ に対して, $w(\gamma)$ を

$$w(\gamma) := \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\gamma} \frac{dz}{z}$$

で定義する. このとき, $w(\gamma) = \deg(\gamma)$ であることを示せ.

解. $\tilde{\gamma}: I \rightarrow \mathbb{R}$ を $\tilde{\gamma}(0) = 0$ となる γ の持ち上げとする. このとき, $\gamma(t) = e \circ \tilde{\gamma}(t) = e^{2\pi\sqrt{-1}\tilde{\gamma}(t)}$.
よって,

$$\begin{aligned} w(\gamma) &:= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\gamma} \frac{dz}{z} \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_0^1 \frac{1}{\gamma(t)} \frac{d\gamma}{dt}(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_0^1 \frac{1}{e^{2\pi\sqrt{-1}\tilde{\gamma}(t)}} \left(2\pi\sqrt{-1} \frac{d\tilde{\gamma}}{dt}(t) e^{2\pi\sqrt{-1}\tilde{\gamma}(t)} \right) dt \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_0^1 \frac{d\tilde{\gamma}}{dt}(t) dt \\ &= \tilde{\gamma}(1) - \tilde{\gamma}(0) \\ &= \deg(\gamma). \end{aligned}$$

□