幾何学3演習No.5略解

2017年5月23日（火）

問題 9 *2*つの位相空間 $(X, \mathcal{O}_X)$，$(Y, \mathcal{O}_Y)$ の間の連続写像 $f\colon (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ に対して，写像 $f_*\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$ を

$$f_*([\gamma]) := [f \circ \gamma]$$

と定義する．このとき，次の問に答えよ．

(1) f_* は *well-defined* であることを示せ．

(2) f_* は群の準同型写像となることを示せ．

(3) ふたつの連続写像 $f\colon (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ と $g\colon (Y, \mathcal{O}_Y) \to (Z, \mathcal{O}_Z)$ に対して，$(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ が成り立つことを示せ．

解． (1) 2つの道 γ_1，$\gamma_2 \in \Omega(X, x_0, x_0)$ がホモトピックであるとし，$\varphi\colon I \times I \to X$ を γ_1 から γ_2 へのホモトピーとすると，$f \circ \varphi\colon I \times I \to Y$ は $f \circ \gamma_1$ から $f \circ \gamma_2$ へのホモトピーである．従って，f_* は well-defined．
(2) 道の積と写像の合成の定義から

$$f \circ (\gamma_1 * \gamma_2)(t) = \begin{cases} f \circ \gamma_1(2t) & (0 \leq t \leq \dfrac{1}{2}) \\ f \circ \gamma_2(2t-1) & (\dfrac{1}{2} \leq t \leq 1) \end{cases}$$

であるので，$f \circ (\gamma_1 * \gamma_2) = (f \circ \gamma_1) * (f \circ \gamma_2)$．従って，$f_*$ は群準同型写像．
(3) $(g \circ f)_*([\gamma]) = [(g \circ f) \circ \gamma] = [g \circ (f \circ \gamma)] = g_*([f_*([\gamma])])$．

□