幾何学3演習No.4略解

2017年5月16日（火）

問題 7 $(X, \mathcal{O}_X)$，$(Y, \mathcal{O}_Y)$ をともに位相空間とする．

(1) $\mathcal{O}_X$ が離散位相ならば，任意の写像 $f\colon (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ は連続であることを示せ．

(2) $\mathcal{O}_Y$ が自明な位相ならば，任意の写像 $f\colon (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ は連続であることを示せ．

解． (1) 任意の Y の開集合 $O \in \mathcal{O}_Y$ に対して，$f^{-1}(O)$ は X の部分集合であるので，離散位相の定義から $f^{-1}(O) \in \mathcal{O}_X$ となる．従って，f は連続．
(2) 自明な位相の定義から Y の開集合は空集合 $\emptyset$ か Y 自身．$f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$，$f^{-1}(Y) = X$ となるので，どちらも X の開集合である．従って，f は連続．

□

問題 8 $(X, \mathcal{O}_X)$ を自明な位相を持つ位相空間とし，$x_0 \in X$ を基点とする．このとき，基本群 $\pi_1(X, x_0)$ を計算せよ．

解． x_0 を始点，終点とする任意の X の道 $\gamma\colon I \to X$ が 1_{x_0} とホモトピックである．実際，$h\colon I \times I \to X$ を

$$h(t,s) = \begin{cases} \gamma(t) & (0 \leq s \leq \frac{1}{2}) \\ x_0 & (\frac{1}{2} \leq s \leq 1) \end{cases}$$

とおくと，問題 7 (2) より h は連続で，$h(t,0) = \gamma(t)$，$h(t,1) = 1_{x_0}$ となるので，h は γ から 1_{x_0} へのホモトピーである．従って，$\pi_1(X, x_0)$ は自明な群 $\{1_{x_0}\}$ である．

□