幾何学3演習No.3略解

2017年5月9日（火）

問題 5 $(X, \mathcal{O}_X)$ を *Hausdorff* 位相空間とする．このとき，任意の点 $x \in X$ に対して，*1* 点集合 $\{x\}$ は閉集合であることを示せ．

解． $\{x\}$ の補集合 $X \setminus \{x\}$ が $(X, \mathcal{O}_X)$ の開集合であることを示す．$(X, \mathcal{O}_X)$ が Hausdorff であることから，x と任意の $y \in X \setminus \{x\}$ に対して，x の開近傍 U_x と y の開近傍 U_y で $U_x \cap U_y = \emptyset$ であるものが存在する．特に，$x \notin U_y$ から $U_y \subset X \setminus \{x\}$ である．よって，$X \setminus \{x\}$ は開集合である．

□

問題 6 $(X, \mathcal{O}_X)$ を連結な位相空間，$(Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間とし，$f\colon (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ を連続写像とする．このとき，f の像 $f(X)$ は連結であることを示せ．ただし，$f(X)$ には $(Y, \mathcal{O}_Y)$ の相対位相を入れる．

解． $f(X)$ の開集合 U_1，U_2 が，$U_1 \cap U_2 = \emptyset$ かつ $U_1 \cup U_2 = f(X)$ を満たすと仮定すると，相対位相の定義から $(Y, \mathcal{O}_Y)$ の開集合 O_1，O_2 が存在して，$U_1 = O_1 \cap f(X)$，$U_2 = O_2 \cap f(X)$ が成り立つ．このとき，f が連続写像より，$f^{-1}(O_1)$ と $f^{-1}(O_2)$ はいずれも $(X, \mathcal{O}_X)$ の開集合であり，$f^{-1}(O_1) \cap f^{-1}(O_2) = \emptyset$ かつ $f^{-1}(O_1) \cup f^{-1}(O_2) = X$ を満たす．然るに，$(X, \mathcal{O}_X)$ は連結であるので，$f^{-1}(O_1)$ と $f^{-1}(O_2)$ のいずれかは空集合でなければならない．従って，$U_1 = f\left(f^{-1}(O_1)\right)$ と $U_2 = f\left(f^{-1}(O_2)\right)$ のどちらかは空集合である．

□