

幾何学3演習 No.2 略解

2017 年 4 月 25 日 (火)

問題 3 $(X, \mathcal{O}_X)$ と $(Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間とし, $f: (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ を連続写像とする. このとき, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ の任意の閉集合 A に対して, A の f による逆像 $f^{-1}(A)$ は $(X, \mathcal{O}_X)$ の閉集合であることを示せ.

解. $f^{-1}(A)$ の補集合が $(X, \mathcal{O}_X)$ の開集合であることを示す. $f^{-1}(A)$ の補集合は $f^{-1}(Y \setminus A)$ であるが, 閉集合の定義から $Y \setminus A$ は開集合であり, f は連続なので, その逆像 $f^{-1}(Y \setminus A)$ は開集合である.

□

問題 4 $(X, \mathcal{O}_X)$ をコンパクトな位相空間, A を $(X, \mathcal{O}_X)$ の閉集合とする. このとき, A はコンパクトであることを示せ. ただし, A には $(X, \mathcal{O}_X)$ の相対位相を入れる.

解. $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を A の開被覆とする. 相対位相の定義より, 任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して, X の開集合 O_λ で $U_\lambda = O_\lambda \cap A$ となるようなものが存在する. このとき, $\{O_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \cup \{X \setminus A\}$ は X の開被覆なので (A が閉集合より $X \setminus A$ が開集合となることに注意), X がコンパクト性より, $\{O_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ から有限個の開集合 $O_{\lambda_1}, \dots, O_{\lambda_m}$ を選んで, $\{O_{\lambda_1}, \dots, O_{\lambda_m}, X \setminus A\}$ で X を覆うことが出来る. 従って, 特に, $U_{\lambda_1}, \dots, U_{\lambda_m}$ は A の開被覆である.

□