幾何学3演習No.1略解

2017年4月18日（火）

問題 1 (1) $O_1, \dots, O_m$ を n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の開集合とする．このとき，$O_1 \cap \cdots \cap O_m$ も $\mathbb{R}^n$ の開集合になることを示せ．
(2) $\mathbb{R}^n$ の無限個の開集合の族 $\{O_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ で，$\cap_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda$ が $\mathbb{R}^n$ の開集合にならないような例を挙げよ．

解． (1) 任意の $x \in O_1 \cap \cdots \cap O_m$ に対して，$x \in O_1 \cap \cdots \cap O_m \subset O_i$（$i = 1, \dots m$）であり，各 O_i が $\mathbb{R}^n$ の開集合であることから、正数 $\varepsilon_i > 0$ をうまく選ぶと $D_{\varepsilon_i}(x) \subset O_i$ とできる．そこで，$\varepsilon := \min\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m\}$ とおけば，任意の $i = 1, \dots m$ に対して，

$$D_\varepsilon(x) \subset D_{\varepsilon_i}(x) \subset O_i$$

となるので，

$$D_\varepsilon(x) \subset \cap_{i=1}^m O_i.$$

(2) 任意の自然数 $m \in \mathbb{N}$ に対して $O_m := (-\frac{1}{m}, \frac{1}{m})$ とおくと，O_m は $\mathbb{R}$ の開集合であるが，$\cap_{m \in \mathbb{N}} O_m = \{0\}$ となり，$\{0\}$ は $\mathbb{R}$ の開集合でない．

□

問題 2 $(X, \mathcal{O}_X)$ を位相空間とし，$f\colon X \to Y$ を X から集合 Y への写像とする．このとき，Y の部分集合の族 $\mathcal{O}_Y$ を

$$\mathcal{O}_Y := \{O \subset Y \mid f^{-1}(O) \in \mathcal{O}_X\}$$

と定めると，$\mathcal{O}_Y$ は Y の位相となることを示せ．

解． まず，$f^{-1}(Y) = X \in \mathcal{O}_X$，$f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{O}_X$ より，Y，$\emptyset \in \mathcal{O}_Y$．

次に，任意の $O_1, \dots, O_m \in \mathcal{O}_Y$ に対して，$f^{-1}(O_i) \in \mathcal{O}_X$（$i = 1, \dots, m$）であり，

$$f^{-1}\left(\cap_{i=1}^m O_i\right) = \cap_{i=1}^m f^{-1}(O_i) \in \mathcal{O}_X$$

となるので，$\cap_{i=1}^m O_i \in \mathcal{O}_Y$．

最後に，任意の開集合の族 $\{O_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subset \mathcal{O}_Y$ に対して，$f^{-1}(O_\lambda) \in \mathcal{O}_X$（$\lambda \in \Lambda$）であり，

$$f^{-1}\left(\cup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda\right) = \cup_{\lambda \in \Lambda} f^{-1}(O_\lambda) \in \mathcal{O}_X$$

となるので，$\cup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \mathcal{O}_Y$．

□