曲線曲面論 補足・補充の問題

2015年1月19日（月）

このプリントは, Oh-o! Meiji システム（URL: http://oh-o2.meiji.ac.jp）のクラス・ウェブ内のページ**理工学部　曲線曲面論　吉田尚彦専任講師（月）3 時限目後期**からもダウンロードできます．質問等は **takahiko@meiji.ac.jp** まで.

問題 1 平面曲線

$$\gamma(t) = \left(\cos^3 t, \sin^3 t\right) \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

の長さを求めよ.

問題 2 平面曲線

$$\gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t) \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

について次の問に答えよ.

（1）この平面曲線の長さを求めよ.

（2）弧長パラメータ表示を求めよ.

（3）曲率を計算せよ.

（4）頂点を求めよ.（頂点については教科書 *p 23* を参照せよ）

（5）この平面曲線の概形を凹凸も考慮して描け.

問題 3 n 次正方行列 A に対して，行列の指数関数 $\exp A$ を

$$\exp A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = I_n + A + \frac{1}{2}A^2 + \cdots + \frac{1}{k!}A^k + \cdots$$

と定める．ここで，I_k は k 次単位行列，$A^k = A \cdot A \cdots A$（A を k 回かけたもの）とする．次の問に答えよ.

(1) 2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}$ に対して，$\exp A$ を求めよ．
(2) 任意の実数値 C^∞ 級関数 $\kappa(s)$（$0 \leq s \leq l$）と任意の 2 次正方行列 A_0 に対して，2 次正方行列に値をとる関数 $A(s)$ を

$$A(s) := A_0 \exp \begin{pmatrix} 0 & -\int_0^s \kappa(u)du \\ \int_0^s \kappa(u)du & 0 \end{pmatrix}$$

と定める．このとき，$A(s)$ は微分方程式

$$\frac{d}{ds}A(s) = A(s) \begin{pmatrix} 0 & -\kappa(s) \\ \kappa(s) & 0 \end{pmatrix}$$

の解であることを示せ．
(3) 実数値 C^∞ 級関数 $\kappa(s)$（$0 \leq s \leq l$）に対して，s を弧長パラメータとし，$\kappa(s)$ を曲率とする平面曲線 $\gamma(s) = (x(s), y(s))$ で $\gamma(0) = (0, 0)$ をみたすものを求めよ．

問題 4 空間曲線

$$\gamma(t) = (t\cos t, t\sin t, t) \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

について次の問に答えよ．
（1）この空間曲線の長さを求めよ．
（2）曲率 $\kappa(t)$ と捩率 $\tau(t)$ を計算せよ．

問題 5 弧長パラメータで表示された平面曲線 $\gamma(s) = (x(s), y(s))$ の曲率がいたるところ 0 でないとする．このとき，空間曲線 $\tilde{\gamma}(s) = (x(s), y(s), 0)$ の曲率は $\gamma(s)$ の曲率の絶対値に等しく，捩率は恒等的に 0 であることを示せ．