

# 重み付きグラスマンのシューベルトカルキュラスと 対称多項式

阿部 拓  
大阪市立大学 数学研究所

この概説は Korea Advanced Institute of Science and Technology (KAIST) の松村朝雄氏との共同研究に基づく。

## 1 序論

シューベルトカルキュラスは、歴史的にはシューベルトによるある条件を満たす直線の数え上げの問題に端を発し、現代的な言葉ではグラスマン多様体のコホモロジー環のシューベルト類に関する構造定数を求めるという問題として述べることができる。詳しい解説は [5] や [7] を見られたい。以下、 $0 < d < n$  を整数とし、アフィン空間  $\mathbb{C}^n$  の  $d$  次元複素線型部分空間全体の成すグラスマン多様体を  $\text{Gr}(d, n)$  で表し、 $H^*(-)$  は特異コホモロジーを表すことにする。

高さが  $d$  で幅が  $n - d$  の長方形に収まるヤング図形の集合  $\mathcal{P}(d, n)$  を考える。この集合に属する各ヤング図形  $\lambda$  に対し、シューベルトセル  $\Omega_\lambda^\circ$  と呼ばれるグラスマン多様体の部分空間が定まり、それらによってグラスマン多様体はセル分解される。各セルの閉包  $\Omega_\lambda := \overline{\Omega_\lambda^\circ}$  はシューベルト多様体とよばれ、その Poincaré 双対  $S_\lambda := [\Omega_\lambda] \in H^*(\text{Gr}(d, n); \mathbb{Z})$  はコホモロジー群の基底を与える。

$$H^*(\text{Gr}(d, n); \mathbb{Z}) = \bigoplus_{\lambda \in \mathcal{P}(d, n)} \mathbb{Z} S_\lambda$$

コホモロジーはカップ積により環を成しており、シューベルト類同士のカップ積はシューベルト類自身で展開することができる。

$$S_\lambda S_\mu = \sum_{\nu \in \mathcal{P}(d, n)} c_{\lambda\mu}^\nu S_\nu, \quad c_{\lambda\mu}^\nu \in \mathbb{Z} \quad (1)$$

この展開係数  $c_{\lambda\mu}^\nu$  は構造定数と呼ばれ、この数を理解することがシューベルトカルキュラスの目的である（シューベルトが考えていた数え上げの問題の解をこれらの数を用いて与えることができる）。この構造定数については、すでに様々な理解の仕方が分かっている。この数は3つのシューベルト多様体の交叉数であり、一般線形群  $\text{GL}_d(\mathbb{C})$  の既約表現のテンソル積に関する多重度としても理解できる。また、組み合わせ論的な明示公式も複数分かっている。例えば、Littlewood-Richardson 則や、Knutson-Tao のパズル則がそれである。

グラスマン多様体は自然な包含列  $\cdots \hookrightarrow \text{Gr}(d, n) \hookrightarrow \text{Gr}(d, n+1) \hookrightarrow \cdots$  を持っており、この列が誘導するコホモロジーにおける射影系において、シューベルト類は自然な安定性を持っている。それはつまり各ヤング図形  $\lambda$  に対してそれに対応するシューベルト類の親玉が存在することを意味するが、これは次のようにして説明することができる。グラスマン多様

体のコホモロジー環はその標準束  $S$  のチャーン類によって生成されており、環準同型

$$\phi: \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_d]^{\mathfrak{S}_d} \longrightarrow H^*(\mathrm{Gr}(d, n); \mathbb{Z}) \quad ; \quad e_i(x) \mapsto c_i(S^*)$$

が定まる．ここで、 $e_i(x)$  は  $i$  次基本対称式を表し、 $S^*$  は  $S$  の双対束である．このとき、 $\phi$  の下でシューア多項式  $s_\lambda(x)$  はシューベルト類を表す．すなわち  $\lambda$  を高さが高々  $d$  のヤング図形とすると、

$$s_\lambda(x) \mapsto \begin{cases} S_\lambda & \lambda \in \mathcal{P}(d, n) \text{ のとき,} \\ 0 & \text{それ以外.} \end{cases} \quad (2)$$

つまり、 $n > d$  を満たすどんな自然数  $n$  に対しても、シューベルト類  $S_\lambda \in H^*(\mathrm{Gr}(d, n); \mathbb{Z})$  はシューア多項式  $s_\lambda(x)$  の影なのである．

シューア多項式は  $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_d]^{\mathfrak{S}_d}$  の基底になっているので、先と同様に構造定数を考えることが出来る．

$$s_\lambda s_\mu = \sum_{\nu \in \mathcal{P}(d)} C_{\lambda\mu}^\nu s_\nu, \quad C_{\lambda\mu}^\nu \in \mathbb{Z}$$

今、 $\phi$  は環準同型なので、 $\lambda, \mu, \nu \in \mathcal{P}(d, n)$  の時は  $c_{\lambda\mu}^\nu = C_{\lambda\mu}^\nu$  である．シューア多項式は一般線形群  $\mathrm{GL}_d(\mathbb{C})$  の有理表現の既約指標なので、この定数  $C_{\lambda\mu}^\nu$  は  $\mathrm{GL}_d(\mathbb{C})$  の既約有理表現のテンソル積に関する多重度そのものである．例えばこのようにしてシューベルトカルキュラスの表現論的な側面を見て取ることが出来る．

この概説は、重み付きグラスマンと呼ばれる軌道体において以上2つのこと、すなわち

- (A) シューベルト類の定義とその構造定数の明示公式の導出
- (B) シューベルト類を普遍的に代表する多項式の構成

をどのように行うことができるかということ概観したものである．証明などの詳細（及び同変版の解説）は [1, 2] にゆずる．

## 2 重み付きグラスマン軌道体とそのシューベルト類

よく知られているように、グラスマン多様体  $\mathrm{Gr}(d, n)$  は Plücker 埋め込みによって射影空間に埋め込むことができる．

$$\mathrm{Gr}(d, n) \hookrightarrow \mathbb{P}(\wedge^d \mathbb{C}^n) \quad ; \quad \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{z_1, \dots, z_d\} \mapsto [z_1 \wedge \dots \wedge z_d] \quad (3)$$

一般線形群  $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$  の  $\mathbb{C}^n$  への標準的な作用は  $\wedge^d \mathbb{C}^n$  へ線型な作用を自然に誘導し、ゆえに  $\mathbb{P}(\wedge^d \mathbb{C}^n)$  への作用が誘導される．Plücker 埋め込みの下で、 $\mathrm{Gr}(d, n)$  は次のように同一視される．

$$\mathrm{Gr}(d, n) \cong \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \cdot [e_1 \wedge \dots \wedge e_d] \subset \mathbb{P}(\wedge^d \mathbb{C}^n)$$

ただし、 $e_1, \dots, e_n$  は  $\mathbb{C}^n$  の標準ベクトルである．そこで次の定義をする．

$$\mathrm{aPl}^\times(d, n) := \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \cdot (\mathbb{C}e_1 \wedge \dots \wedge e_d) - \{0\} \subset \wedge^d \mathbb{C}^n - \{0\}$$

このとき、 $\mathbf{aPl}^\times(d, n)$  は非特異な代数多様体の構造をもち、自然な射影  $\wedge^d \mathbb{C}^n - \{0\} \rightarrow \mathbb{P}(\wedge^d \mathbb{C}^n)$  の制限

$$\mathbf{aPl}^\times(d, n) \rightarrow \mathrm{Gr}(d, n) \quad (4)$$

は主  $\mathbb{C}^\times$  束である。今、 $T := (\mathbb{C}^\times)^n$  とおき、これを  $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$  の対角成分の成すトーラスと同一視しておく。このとき、 $T$  は  $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$  の作用の制限として、また  $\mathbb{C}^\times$  はスカラー倍としてそれぞれ  $\wedge^d \mathbb{C}^n$  へ作用する。この2つの作用は可換であるので、 $K = T \times \mathbb{C}^\times$  とおくと、 $K$  はこれらの作用を通じて  $\wedge^d \mathbb{C}^n$  へ線型に作用する。

さて、重み付きグラスマン軌道体を定義しよう。  $w_1, \dots, w_n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  をゼロ以上の整数とし、以下  $w_1 \leq w_2 \leq \dots \leq w_n$  を仮定する<sup>1</sup>。これらの数を用いて  $K$  の部分群  $G_w$  を次のように定める。

$$G_w := \{(t^{w_1}, \dots, t^{w_n}, t) \in T \times \mathbb{C}^\times \mid t \in \mathbb{C}^\times\}$$

このとき  $G$  の  $\wedge^d \mathbb{C}^n - \{0\}$  への作用は各点で安定化部分群が有限群になる。

**定義 2.1.** 重み付きグラスマン軌道体を次のように定義する。

$$\mathbf{wGr}(d, n) := \mathbf{aPl}^\times(d, n)/G_w$$

**注意 2.2.** 重み付きグラスマンをリー亜群で表示する際は、この表示によって定まる作用亜群  $[\mathbf{aPl}^\times(d, n)/G_w]$  として理解することと約束する（亜群による軌道体の表示については [3, 9] などを参照）。一方、 $\mathbf{wP}(\wedge^d \mathbb{C}^n) := \mathbb{P}(\wedge^d \mathbb{C}^n)/G_w$  は重み付き射影空間であり、重み付きグラスマン  $\mathbf{wGr}(d, n)$  は  $\mathbf{wP}(\wedge^d \mathbb{C}^n)$  において Plücker 関係式で定義される射影多様体ともできる。有理係数で扱う限り、両者の特異コホモロジーに差はない（命題 2.3）。

**命題 2.3.** 商写像  $\pi : \mathbf{aPl}^\times(d, n) \rightarrow \mathbf{wGr}(d, n)$  が誘導する環準同型

$$\pi^* : H^*(\mathbf{wGr}(d, n); \mathbb{Q}) \rightarrow H_{G_w}^*(\mathbf{aPl}^\times(d, n); \mathbb{Q}) \quad (5)$$

は同型写像である。

グラスマン多様体のシューベルト多様体  $\Omega_\lambda \subset \mathrm{Gr}(d, n)$  を射影 (4) によりひき戻したものを  $\mathbf{a}\Omega_\lambda$  と書くことにすると、 $\mathbf{a}\Omega_\lambda$  は  $\mathbf{aPl}^\times(d, n)$  の規約な代数的部分多様体になる。 $\mathbf{aPl}^\times(d, n)$  は非特異であったので、 $\mathbf{a}\Omega_\lambda$  が定めるコホモロジー類  $[\mathbf{a}\Omega_\lambda]_{G_w} \in H_{G_w}^*(\mathbf{aPl}^\times(d, n); \mathbb{Q})$  を  $G_w$  同変な Gysin 写像によって構成し、 $\mathbf{wGr}(d, n)$  のシューベルト類  $\mathbf{w}S_\lambda \in H^*(\mathbf{wGr}(d, n); \mathbb{Q})$  を  $\pi^*(\mathbf{w}S_\lambda) = [\mathbf{a}\Omega_\lambda]_{G_w}$  によって定める。このとき次が従う。

**命題 2.4.**  $\{\mathbf{w}S_\lambda\}_{\lambda \in \mathcal{P}(d, n)}$  は  $H^*(\mathbf{wGr}(d, n); \mathbb{Q})$  の基底を成す。

ゆえに、重みがない場合 (1) と同様に、 $H^*(\mathbf{wGr}(d, n); \mathbb{Q})$  における構造定数を考えることが可能である。

$$\mathbf{w}S_\lambda \mathbf{w}S_\mu = \sum_{\nu \in \mathcal{P}(d, n)} \mathbf{w}c_{\lambda\mu}^\nu \mathbf{w}S_\nu, \quad \mathbf{w}c_{\lambda\mu}^\nu \in \mathbb{Q} \quad (6)$$

<sup>1</sup>重みの順序を入れ替えた重み付きグラスマンとの間の同型を座標の入れ替えにより構成することで、この仮定は常に実現することができる。

以下でこの構造定数の明示公式を説明する.

ヤング図形  $\lambda \in \mathcal{P}(d, n)$  に対し, その  $i$  行目の箱の数を  $\lambda_i$  で表し, 記号

$$\lambda(i) := n - d + i - \lambda_i, \quad 1 \leq i \leq n$$

を導入しておく. もちろん  $1 \leq \lambda(i) \leq n$  である. グラスマン多様体  $\text{Gr}(d, n)$  は  $n$  次元複素トーラス  $T = (\mathbb{C}^\times)^n$  による自然な作用を持っており, 各シューベルト多様体は  $T$ -不変である. よって同変コホモロジー  $H_T^*(\text{Gr}(d, n); \mathbb{Z})$  においてシューベルト多様体を表すクラスを構成でき, それらはやはり  $H_T^*(\text{Gr}(d, n); \mathbb{Z})$  の  $H_T^*(\text{pt}; \mathbb{Z})$  上の基底を成す. これらに関する構造定数を  $\tilde{c}_{\lambda\mu}^{\nu^k} \in H_T^*(\text{pt}; \mathbb{Z})$  によって表すことにする.  $H_T^*(\text{pt}; \mathbb{Z}) = H^*(BT; \mathbb{Z})$  は環としては次数 2 の部分加群  $H^2(BT; \mathbb{Z})$  で生成されており,  $H^2(BT; \mathbb{Z}) = \text{Hom}(T, \mathbb{C}^\times)$  は座標関数  $y_1, \dots, y_n$  の成す加群である. ここで  $y_i$  は第  $i$  座標を値にもつ関数である. 定義より, 同変構造定数  $\tilde{c}_{\lambda\mu}^{\nu^k}$  は  $H_T^*(\text{pt}; \mathbb{Z})$  の元なので,  $y_1, \dots, y_n$  の多項式である.  $\tilde{c}_{\lambda\mu}^{\nu^k}$  の組み合わせ論的な公式は [8, 11] などを参照されたい.

**定理 2.5.** 任意の  $\lambda, \mu, \nu \in \mathcal{P}(d, n)$  に対し, 重み付きシューベルト類に関する構造定数  $wc_{\lambda\mu}^{\nu}$  は次の式で与えられる.

$$wc_{\lambda\mu}^{\nu} = c_{\lambda\mu}^{\nu} + \sum_{\substack{\nu \rightarrow \nu^1 \rightarrow \dots \rightarrow \nu^k \geq \lambda, \mu}} \frac{\tilde{c}_{\lambda\mu}^{\nu^k}(y_i = w_i, i = 1, \dots, n-1)}{w_{\nu^1} \cdots w_{\nu^k}}$$

ここで,  $w_\nu = w_{\nu(1)} + \cdots + w_{\nu(d)} + 1$  であり,  $\nu \rightarrow \nu'$  は図形としての自然な包含関係において  $\nu$  が  $\nu'$  より大きくて箱の総数の差が 1 であるときをいう.

同変構造定数  $\tilde{c}_{\lambda\mu}^{\nu}$  は  $y_{i+1} - y_i$  ( $i = 1, \dots, n-1$ ) の非負係数多項式として記述できるので ([6, 8]), 仮定  $w_1 \leq \cdots \leq w_n$  により次が従う.

**系 2.6.** 任意の  $\lambda, \mu, \nu \in \mathcal{P}(d, n)$  に対し,  $wc_{\lambda\mu}^{\nu} \geq 0$ .

### 3 シューア多項式の重み付きの類似

重み付きシューベルト類に関する構造定数は定理 2.5 によって記述されることが分かった. ここでは, これらシューベルト類を普遍的に表現することを考える.

まず, 天下り的ではあるが次の定義を与える. 2 節では重みとして  $w_1, \dots, w_n$  のみを考えたが, ここでは話を改めて, 無限列  $w_1, w_2, \dots \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  で  $w_1 \geq w_2 \geq \cdots$  を満たすものを出発点とする. また, 高さが  $d$  以下のヤング図形の集合を  $\mathcal{P}(d)$  で表す. もちろん, 各  $n(> d)$  に対し  $\mathcal{P}(d, n) \subset \mathcal{P}(d)$  である.

**定義 3.1.** 各  $\lambda \in \mathcal{P}(d)$  に対し,  $ws_\lambda(x) \in \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_d]^{\mathfrak{S}_d}$  を次で定める.

$$\begin{aligned} ws_\lambda(x) &:= s_\lambda(x|a)|_{a_i = -w_i(x_1 + \cdots + x_d)}, \\ &= \sum_T \prod_{\alpha \in \lambda} (x_{T(\alpha)} + w_{T(\alpha)+c(\alpha)}(x_1 + \cdots + x_d)) \end{aligned} \quad (7)$$

ここで,  $s_\lambda(x|a)$  は factorial シューア多項式である.  $T$  の和は型が  $\lambda$  で要素が  $\{1, \dots, d\}$  に属するヤング盤  $T$  についてとり,  $T(\alpha)$  は  $T$  の  $\alpha \in \lambda$  における数を表し,  $\alpha$  が  $(i, j)$ -成分ならば  $c(\alpha) = j - i$  である.

**例 3.2.**  $d = 2$  とし,  $\lambda = (1, 1)$  (箱が縦に 2 個並んだヤング図形) とすると次のようになる.

$$\begin{aligned} s_\lambda(x) &= x_1 x_2 \\ ws_\lambda(x) &= (x_1 + w_1(x_1 + x_2))(x_2 + w_1(x_1 + x_2)) \end{aligned}$$

factorial シューア多項式の諸性質は [10] に譲るが, その性質より次が従う.

**命題 3.3.**  $\{ws_\lambda(x)\}_{\lambda \in \mathcal{P}(d)}$  は  $\mathbb{Q}[x_1, \dots, x_d]^{\mathfrak{S}_d}$  の  $\mathbb{Q}$  上の基底を成す.

重み付きのシューベルト類との関係を以下で説明する. まず,  $n (> d)$  を任意にとり,  $\overline{\text{wGr}}(d, n)$  を重みが  $(w_n, \dots, w_1)$  である重み付きグラスマンとする. 重み付きグラスマン上の標準束  $S$  は一般にはベクトル束にならないが, 複素軌道束の構造を持つ. 通常のグラスマン多様体のときと同様に,  $H^*(\overline{\text{wGr}}(d, n); \mathbb{Q})$  はその標準束  $S$  のチャーン類で生成される. すなわち, 全射環準同型

$$\phi: \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_d]^{\mathfrak{S}_d} \longrightarrow H^*(\overline{\text{wGr}}(d, n); \mathbb{Q})$$

が  $\phi(e_i(x)) = c_i(S^*)$  によって定まる. ここで,  $e_i(x)$  は基本対称式である.

**定理 3.4.**  $\lambda$  を高さが  $d$  以下のヤング図形とする. 任意の  $n (> d)$  に対して, 次が成り立つ.

$$ws_\lambda(x) \xrightarrow{\phi} \begin{cases} ws_\lambda & \lambda \in \mathcal{P}(d, n) \text{ のとき,} \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

この意味で,  $ws_\lambda(x)$  は重み付きのシューベルト類を普遍的に代表するものである. そして  $ws_\lambda(x)$  は (その定義式 (7) より) 標準軌道束の第 1 チャーン類によってシューア多項式を捻ったものであると言える.

$ws_\lambda(x)$  についてのより踏み込んだ解析は [2] にゆずるが, 例えば次のようなことが分かっている. ここでは記述の統一のために  $ws_\lambda(x)$  を  $\mathbb{Q}[x_1, \dots, x_d]^{\mathfrak{S}_d}$  の元として導入したが, 定義より明らかに  $ws_\lambda(x)$  は  $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_d]^{\mathfrak{S}_d}$  の元であり, シューア多項式の整係数和として書くことができる.

$$ws_\lambda(x) = \sum_{\mu} m_{\lambda\mu} s_{\mu}(x) \quad (m_{\lambda\mu} \in \mathbb{Z})$$

$m_{\lambda\mu}$  の具体形は factorial シューア多項式の理論から得られ, その形から実は  $m_{\lambda\mu} \geq 0$  が従う.

## 参考文献

- [1] H. Abe and T. Matsumura, *Equivariant cohomology of weighted Grassmannians and weighted Schubert classes*, preprint (math.AT/1207.2216).
- [2] H. Abe and T. Matsumura, *Weighted Schur functions*, preprint (math.AT/1209.2597).
- [3] A. Adem, J. Leida, Y. Ruan, *Orbifolds and stringy topology*, volume **171** of Cambridge Tracts in Mathematics. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2007.

- [4] A. Corti and M. Reid, *Weighted Grassmannians*, Algebraic geometry (eds. Beltrametti et al.), de Gruyter (2002), 141-163.
- [5] W. Fulton, *Young Tableaux: With Applications to Representation Theory and Geometry*, London Math. Soc. Student Texts **35**, Cambridge Univ. Press, 1997.
- [6] W. Graham, *Positivity in equivariant Schubert calculus*, Duke Math. J. **109** (2001)
- [7] S. L. Kleiman and D. Laksov, *Schubert Calculus*, Amer. Math. Monthly **79**, no. 10 (1972), 1061-1082.
- [8] A. Knutson and T. Tao, *Puzzles and (equivariant) cohomology of Grassmannians*, Duke Math. J. **119** (2) (2003), 221-260.
- [9] I. Moerdijk, *Orbifolds as groupoids: an Introduction*, preprint (math/0203100).
- [10] A. I. Molev and B. E. Sagan, *A Littlewood-Richardson rule for factorial Schur functions*, Trans. Amer. Math. Soc. **351** (1999), 4429-4443.
- [11] H. Thomas and A. Yong *Equivariant Schubert calculus and jeu de taquin*. arXiv:1207.3209.