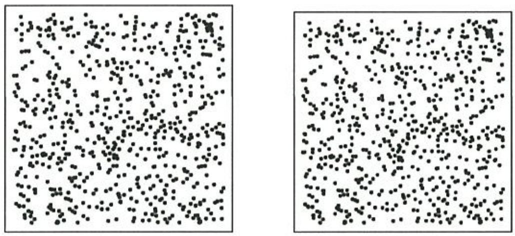
1. 対数らせんの抽出 (第 1 章)

準備 ① ランダム・ドット・パターンを印刷した紙

② それを 97%相似縮小して印刷した透明シート (OHP シート)

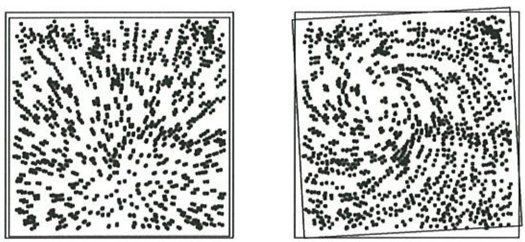


① 紙(オリジナル)　② 透明シート(相似縮小)

図 0.1

実験 (1) ① の紙の上に ② の透明シートを紙からはみ出さないように，上下左右の向きを合わせ，各辺を平行に，回転させないで置く (図 0.2 (1)).

(2) 次に ② の透明シートを (適当な点を中心に) 少し回転させる (図 0.2 (2)).



(1) 無回転　(2) 少し回転

図 0.2

観察 (1) 『スター・ウォーズ』にでてくる宇宙船のワープ・シーンのような放射状の模様を知覚できないだろうか.

(2) らせんを知覚できないだろうか.

数学 実験 (2) の結果から知覚されるらせんの極方程式を導出しよう. ある点の極座標を $(r(\theta)\cos\theta, r(\theta)\sin\theta)$ とし，動径 $r(\theta)$ が φ だけ回転し

たとき，α 倍 $(0 < \alpha < 1)$ に縮小されたとする．このとき，動径は $r(\theta + \varphi) = \alpha r(\theta)$ を満たす (図 1.8，49 ページ)．

与えられた φ と α に対して，この方程式を満たす滑らかな曲線の動径 $r(\theta)$ を求めたい．しかし，そのような曲線の候補は無限にあるから，この方程式だけからは求まらない．そこで，以下のようなことが脳の知覚として行われていると仮定しよう．回転角が $\dfrac{\varphi}{2}$ のときの縮小率を $\beta > 0$ とする，すなわち，$r\left(\theta + \dfrac{\varphi}{2}\right) = \beta r(\theta)$ を満たすとする．このとき，

$$r(\theta + \varphi) = r\left(\left(\theta + \frac{\varphi}{2}\right) + \frac{\varphi}{2}\right) = \beta r\left(\theta + \frac{\varphi}{2}\right) = \beta^2 r(\theta) = \alpha r(\theta)$$

から，$\beta = \alpha^{1/2}$ がわかる．同様に，回転角が $\dfrac{\varphi}{n}$ のときの縮小率を $\beta > 0$ とすると，$\beta = \alpha^{1/n}$ であることがわかる．すなわち，$r\left(\theta + \dfrac{\varphi}{n}\right) = \alpha^{1/n} r(\theta)$ を得る．よって，$k = \dfrac{1}{n}$, $h = \varphi k$ とおけば，$r(\theta + h) = \alpha^k r(\theta)$ となる．両辺から $r(\theta)$ を引いて，h で割れば，

$$\frac{r(\theta + h) - r(\theta)}{h} = \frac{\alpha^k - 1}{h} r(\theta) = \frac{\alpha^k - \alpha^0}{k} \times \frac{r(\theta)}{\varphi} \tag{0.1}$$

と変形できるが，滑らかな $r(\theta)$ を求めたいので，両辺において極限 $h \to 0$ $(k \to 0)$ をとって，$r'(\theta) = \dfrac{\log \alpha}{\varphi} r(\theta)$ を得る．(0.1) の左辺の極限は導関数 $r'(\theta)$ の定義そのものであり，右辺の $\times$ の左側の項の極限は $f(x) = \alpha^x$ とおくと $f'(0)$ にほかならないことを使った．ゆえに，これを解いて，

$$r(\theta) = r(0)\alpha^{\theta/\varphi}$$

が求まる．これは「対数らせん」である．この曲線は，離散的な点を連続的に滑らかに移動した余韻，履歴，あるいは残像として脳が勝手に描いた曲線といえるのではなかろうか．

第1章

世界でたった一つの場所
―― 世界地図の数理 ――

本章のキーワードは，ドット・パターン，不動点，微分法，コーシー列，メルカトル図法，縮小写像の原理，ニュートン法である．聞き慣れない用語があると難しく感じるかもしれないが大丈夫．実験はいたって簡単なのでご安心を．

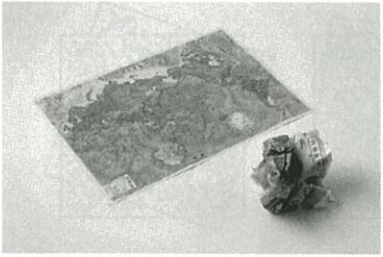
1.　世界にただ一つの場所

ここにまったく同じ世界地図が 2 枚ある．

準備 1.1　世界地図 2 枚 (インターネットに落ちているフリーの地図を紙に印刷したもので十分である)

実験 1.1　一方の地図を丸める (図 1.1 (a)，次ページ)．それを，他方の広げた地図の上に，(線や面でなく) いくつかの点でのみ接触するように，さらに広げた地図からはみ出さないように置く (図 1.1 (b))．

このとき，真上から見ると，丸めた地図のある地点と下に広げた地図のある地点が一致する．そしてそのような地点はただ一つしかない．本章ではこの事実の原理に迫る．またその応用としてニュートン法を紹介する．



(a)

(b)

図 1.1

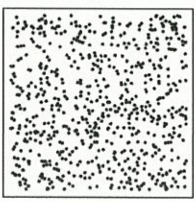
2. 合同変換の不動点

ドット・パターンの実験をしよう [6].

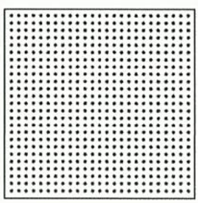
準備 1.2〜1.4 ① ランダム点配置 (図 1.2 (a)), 正方格子点配置 (図 1.2 (b)), 正三角形格子点配置 (図 1.2 (c)) をそれぞれ印刷した紙

② それらをそれぞれ印刷した透明シート (OHP シート)

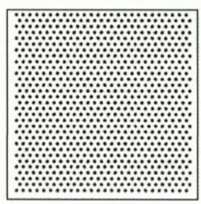
実験 1.2 多数の点をランダムに配置した図 (図 1.2 (a)) を透明シートに写し, ぴったり重ねてから回転する.



(a)



(b)



(c)

図 1.2

図 1.3 (a)〜(c) (次ページ) は, ランダム点配置 (図 1.2 (a)) をそれぞれ $\frac{\pi}{50}$, $\frac{\pi}{20}$, $\frac{\pi}{10}$ ずつ回転させて重ねた図である. 回転量が少なければ, 同心円らしきものが見え, その中心が浮かび上がる (少し大きい黒点が回転の

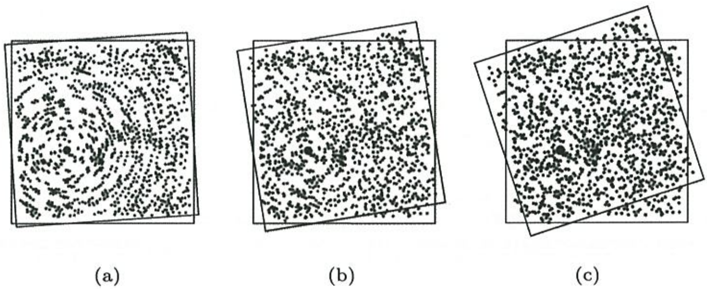


図 1.3

中心である).

実験 1.3　正方格子点配置 (図 1.2 (b)) で同様の実験をする.

図 1.4 は実験 1.3 の結果である. 回転角を大きくすると, より細かい周期パターンが見られる.

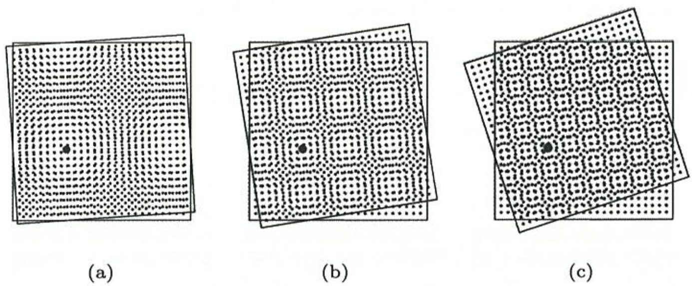
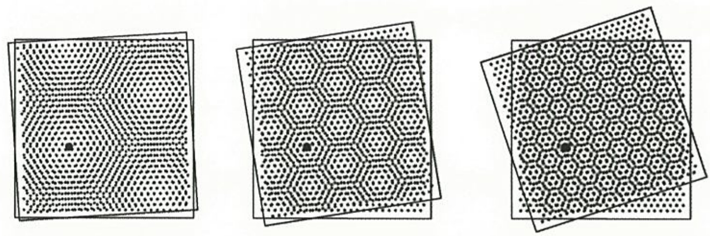


図 1.4

実験 1.4　正三角形格子点配置 (図 1.2 (c)) で同様の実験をする.

今度は図 1.5 (次ページ) のように正六角形状周期パターンが現れた. 図 1.4 も図 1.5 も周期図形の一つの中心が回転の中心になっているが, 周期図形に目移りして多数の偽の中心に惑わされる. 図 1.3 (a), (b) も目眩ましで星空の軌跡のように見てしまう. 周期図形も同心円も描いていないか

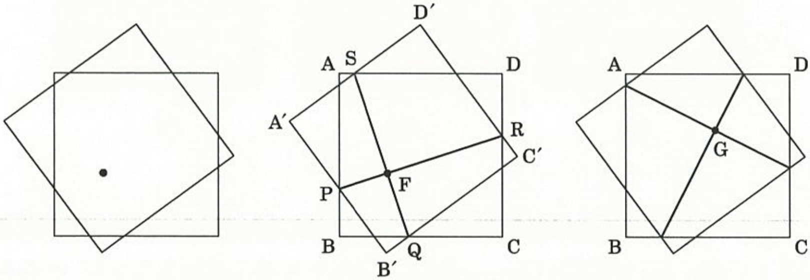


(a) (b) (c)

図 1.5

らこれらは錯覚と言えるだろう．実際，点と点を都合良く補間できない図 1.3 (c) からは特定の図形は浮かび上がらない．これらの周期パターンはモアレ (モワレ，干渉縞) とも言われ，錯視や脳の認知の研究に関わっている．回転の中心はただ一つで，それは二つの正方形の位置から求められる [6]．この中心は「合同変換 (回転) の不動点」と呼ばれる．

研究 1.1 図 1.6 (a) はある回転をした正方形の回転の中心を描いたものである．その中心は，図 1.6 (b) のように求まる．すなわち，正方形 ABCD が回転して A′B′C′D′ になったとしたとき，各辺と回転したその辺の交点をそれぞれ P, Q, R, S とすれば，回転の中心 F は SQ と PR の交点として求まる．これが西山豊氏の発見した定理である．これを示せ．また，図 1.6 (c) の G のような回転の中心もあり得る．この場合，正方形



(a) (b) (c)

図 1.6

ABCD をどのように回転させたといえるか.

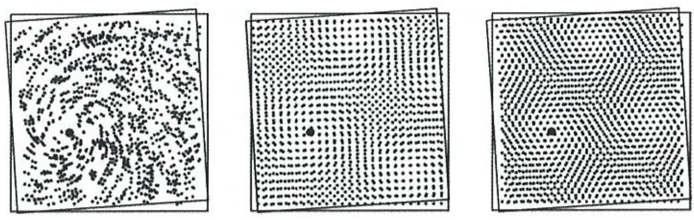
3.　相似変換の不動点

次の実験における回転の中心は「相似変換の不動点」と呼ばれる [6].

準備 1.5　① ランダム点配置 (図 1.2 (a)), 正方格子点配置 (図 1.2 (b)), 正三角形格子点配置 (図 1.2 (c)) をそれぞれ印刷した紙
② それらを 97%相似縮小してそれぞれ印刷した透明シート (OHP シート)

実験 1.5　実験 1.2〜1.4 と同様に, 相似縮小した点配置を重ねて回転する (第 0.1 節参照).

図 1.7 (a)〜(c) は図 1.2 (a)〜(c) をそれぞれ 97%相似縮小して, $\dfrac{\pi}{50}$ 回転させて重ねた実験結果である. 同心円の代わりにらせんが見え, その影響を受けた周期パターンが観察される. 図 1.7 (b) は図 1.4 (a) に, 図 1.7 (c) は図 1.5 (a) にそれぞれ対応している.



(a)　(b)　(c)

図 1.7

図 1.7 (a) は点と点の間を脳で補間してらせんを知覚していると思われる (図 1.7 (b), (c) は周期パターンに邪魔されてらせんが見えない). そのらせんを導出してみよう. 今, 点が極座標 (r, θ) で表されているとして, 簡単のため相似変換の中心を原点とする. このとき, 回転角 φ, 縮小率 $\alpha \in$

$(0, 1)$ とすれば，動径は

$$r(\theta + \varphi) = \alpha r(\theta)$$

を満たす (図 1.8).

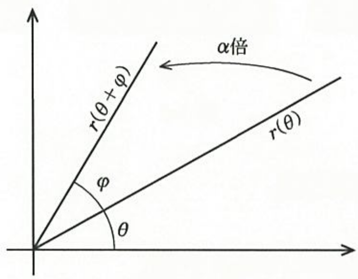


図 1.8

ここで，徐々に回転・相似縮小されると仮定しても補間の仕方は一意でないし，また脳で補間がどのようになされているかわからないが，第 0.1 節で述べたように，角 φ を n 等分したとき，

$$r\left(\theta + \frac{\varphi}{n}\right) = \alpha^{1/n} r(\theta)$$

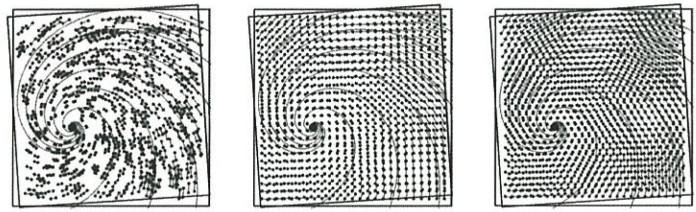
とするのは一つの自然な考えであろう．ここで，$h = \dfrac{\varphi}{n}$ とおけば，$r(\theta + h) = \alpha^{h/\varphi} r(\theta)$ となる．これより，

$$\frac{r(\theta + h) - r(\theta)}{h} = \frac{\alpha^{h/\varphi} - 1}{h} r(\theta)$$

において極限 $h \to 0$ をとって，$r'(\theta) = \dfrac{\log \alpha}{\varphi} r(\theta)$ を得る．この解

$$r(\theta) = r(0)\alpha^{\theta/\varphi}$$

は対数らせんである．図 1.9 (次ページ) では図 1.7 における変換前後の点と点を線分で結び，適当な初期値で対数らせん ($\alpha = 0.97$, $\varphi = \dfrac{\pi}{50}$) を数本描いた．これらは，離散的な点を連続的に移動した余韻，履歴，あるいは残像として脳が勝手に描いた曲線といえるのではなかろうか．



(a)　(b)　(c)

図 1.9

4.　世界地図上の不動点

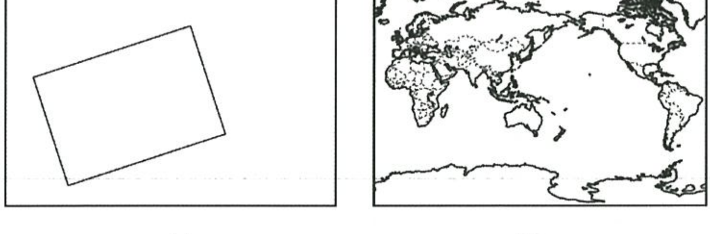
ほかの図で上の実験をしてみよう [7].

準備 1.6　① 長方形の紙の上にそれを 50%相似縮小した長方形を描画し，それを印刷した透明シート (図 1.10 (a))

② ①と同じ長方形の紙に地図を印刷 (図 1.10 (b))

③ ②の地図を 50%相似縮小した地図を印刷した透明シート (図 1.11 (a)，次ページ)

実験 1.6　長方形を相似縮小した長方形を回転させて，元の長方形からはみ出ないように重ねる (図 1.10 (a))．この作業を世界地図 (図 1.10 (b)) に適用する.



(a)　(b)

図 1.10