マテーマティケー
数楽実験室

図と解説：**矢崎成俊**（明治大学）

イラスト　FELIX FABRIC

間瀬 真知香
（ませ・まちか）
フリーの実験数楽者

何戸家 奈留沙
（なんとか・なるさ）
高校 2 年生

何戸家 夏太
（なんとか・なつた）
高校 1 年生。奈留沙の弟

第 14 回

対数らせんを見る

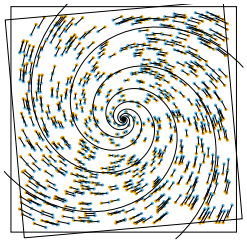
間瀬真知香（ませ・まちか）がルイボスティーの入ったコップをゆらしながら，渦巻きについて考え始めたとき，何戸家奈留沙（なんとか・なるさ）と夏太（なつた）の姉弟が，残暑をものともしない元気さをまとって入ってきた。

「おはようございます。今日も前回に続いて“らせん”について考えましょう。特に“対数らせん”を見ましょう」

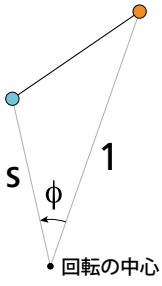
◎ドットパターンから対数らせん出現

「次の図は前回見ました。正方形の中にたくさんのオレンジ色の点をランダムにちりばめて，オレンジ色の点と同じ配置で全体を 97％相似縮小した青色の点が印刷された透明シートをその上にかぶせて，さらに，正方形の中心を回転の中心として少し回転させて，対応するオレンジ色と青色の点を線分で結びます。線分はまとめると渦巻き状に見えて，それは対数らせんになるという話をしました」

真知香は対数らせんを合わせた図を見せながら「どのように対数らせんと計算されたかを考えてみましょう」といった。



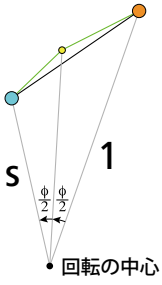
オレンジ色の点（オレンジ点）と対応する青色の点（青点）の動きに注目する。縮小率を s $(0 < s < 1)$ とし，回転角度を ϕ とすると，回転の中心からオレンジ点までの距離と青点までの距離の比は 1 : s で，下図のような状況になる。



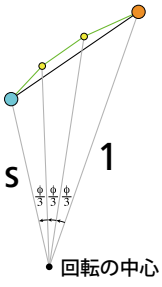
「オレンジ点と青点を結んだ線分がたくさん集まるとらせんに見えるのですね」と奈留沙は状況を理解したが，ここからららせんの式がどのようにして導かれるのかわからない。

真知香は頷いて続けた。まず，上で見たように，角度 ϕ だけ回転すると中心からの距離が s 倍になった。

次に，角度 ϕ の半分の $\phi/2$ 回転したとき，中心からの距離が α 倍になったとする。ϕ 回転は，$\phi/2$ 回転を 2 回繰り返すから，α 倍の α 倍，つまり α の 2 乗が s になる。次の図の黄色の小さな点（黄点）は，オレンジ点を，縮小率 α で，$\phi/2$ 回転した点である。



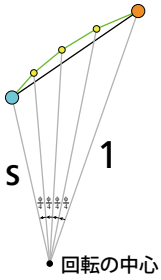
さらに，角度 ϕ の 3 分の 1 の $\phi/3$ だけ回転したとき，中心からの距離が α 倍になったとする。ϕ 回転は，$\phi/3$ 回転を 3 回繰り返すから，α 倍の α 倍の α 倍，つまり α の 3 乗が s になる。図の 2 つの黄点は，オレンジ点を，縮小率 α で，それぞれ $\phi/3$ 回転，$2\phi/3$ 回転した点である。



「次の操作がわかりました」と夏太は説明を始めた。

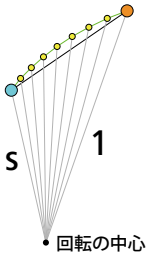
「$\phi/4$ 回転したとき，中心からの距離が α 倍になったとし

ます。φ回転は，φ/4回転を4回繰り返すので，αの4乗がsになります。図の3つの黄点は，オレンジ点を，縮小率αで，それぞれφ/4回転，φ/2回転，3φ/4回転した点です」



「もっと回転角度を細かく刻むと，次の図になります。だんだん，曲線が見えてきました。これがらせんなのですね」

奈留沙は，図を見せながらいった。



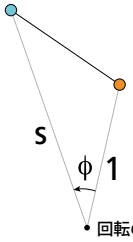
真知香は説明を続けた。

角度φを細かくn等分に分割して，φ/n回転したとき，中心からの距離がα倍になったとする。φ回転は，φ/n回転をn回繰り返すから，αのn乗がsになる。ここでnを限りなく大きくすると，黄点が無限に増えてある曲線に近づくことが予想される。

等分割以外のあらゆる分割を考えても同じ曲線に収束することを示そう。h＝φ/nとおくと，αのn乗，つまりαのφ/h乗がsだから，αはsのh/φ乗に等しい。こうして，等分割から切り離した任意の実数hに対して，オレンジ点をh回転したとき，中心からの距離がsのh/φ乗倍になるという一般の関係が得られる。hを0にする極限をとると，中心からの距離についての微分方程式が導かれ，それを解けば，滑らかな曲線「対数らせん」を得る。

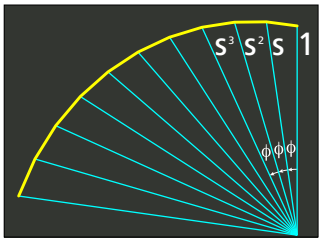
◎オウムガイに見える対数らせん

今度は，sが1よりも大きい拡大率となる場合を考えてみましょう，といって真知香は模式図を見せた。

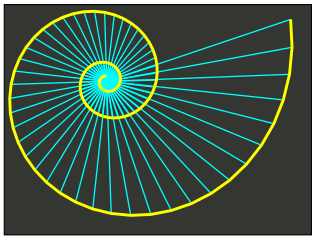


「縮小・拡大は相対的なものなので，この図も，右回転を考えれば，縮小率1/sになるので，前節の話と同じことになります。次のように，φ回転でs倍になる操作を続けてみましょう」

真知香は，雰囲気の異なる図を見せた。



この「φ回転，s倍」の操作をずっと続けていくと，黄色い折れ線の対数らせんはどんどん大きくなっていく。



次の写真を見てくださいと，真知香はオウムガイの殻の断面写真を見せた。

（写真提供：Chris 73（CC BY-SA 3.0））

「オウムガイの殻は折れ線の対数らせんみたいです」と夏太がつぶやいた。

真知香は，折れ線の対数らせんとオウムガイの写真を重ねた図を見せた。

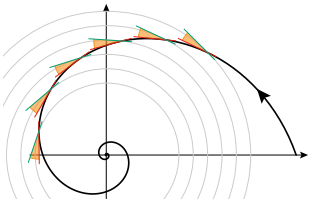
奈留沙と夏太は，おおっと感心した。

◎台風にも対数らせん

「対数らせんは，中心から伸ばした半直線と対数らせんのなす角度は一定である，等角性という性質をもっています。このことは前回（10月号103ページ）見ました」

等角性は，別の言い方をすると，同心円とのなす角度が一

定ということである。真知香は，下図を提示した。



「この同心円を低気圧や台風における等圧線と見ると，低気圧や台風が対数らせんの構造となることが説明できます」

真知香はアイスランド南西沖の寒冷低気圧の写真を見せた。

（写真提供：NASA/GSFC, MODIS Rapid Response Team, Jacques Descloitres（Public Domain））

寒冷低気圧，温帯低気圧やそれが発達した台風などは，いずれも中心に近づくほど気圧が下がっていき，同心円状の等圧線を描く。したがって，気圧の高い周囲から，気圧の低い中心部に向かって風が吹く。これが回転している地球上でおきている。だから，地球の自転によるコリオリ力が働き，北半球だと，風の向きが円の中心よりも右向きに偏る。よって，同心円に対して，つねに一定の角度で風が吹き込んでくる。これは，上述した対数らせんの等角性にほかならないから，風は対数らせんに沿って中心部に向かって流れる。

次の写真は上の写真に 2 本の対数らせんを重ねて描いた。

「南半球だと渦が逆向きだと聞きました」

奈留沙がいったら，だったら逆向きの対数らせんになるのですね，と夏太が応じた。

◎対数らせんは銀河の渦にも見える

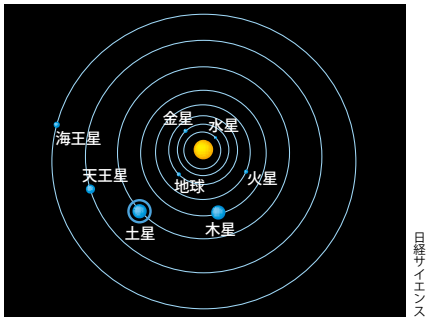
「オウムガイや低気圧，台風は対数らせんであることを見てきました。オウムガイは殻が一定の拡大率で回転しながら成長していくから対数らせんを描くと考えられます。また低気圧や台風は同心円状の等圧線に対して，北半球だと中心よりも右向きに偏向することから，等角性が成り立って，風の流れが対数らせんになると解釈できます。他にも，次のような渦巻く銀河も対数らせんであるといわれています」

真知香は，渦巻銀河 M51 の写真を見せた。

（写真提供：NASA and The Hubble Heritage Team（STScI/AURA）（Public Domain））

「渦巻銀河はなぜ渦を巻いているのでしょう。星が一定の回転角と拡大・縮小率で連なっているとも思えませんし，ブラックホールが中心にあって，星が吸い込まれているわけでもなさそうです。現時点では，渦状構造密度波理論というもので解釈できることが知られています。それを理解するために，地球は太陽の周りに楕円軌道を描いて周回していることを思い出しましょう」

真知香は，太陽系の模式図を見せた。



「見覚えあります。第 1 回の数楽実験室で見ました」

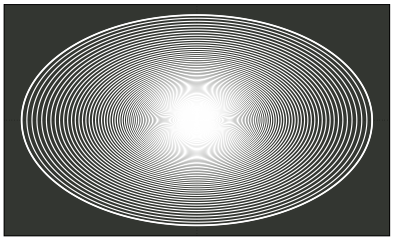
夏太は懐かしそうにいった。「地球の描く楕円軌道はほとんど円に近く，コップにルイボスティーを入れて，コップの下に 1 円玉を挟んで傾いたルイボスティーの表面が描く楕円くらいのわずかな離心率だったのを覚えています」。

奈留沙は感心して夏太を見た。第 1 回には奈留沙は参加していない。

「地球に限らず，惑星は楕円軌道を描いて周回しています。もし，さまざまな星が同じ 1 点を中心として，それぞれ大きさの異なる相似な楕円軌道を描いていたとしたら，次のように見えるかもしれません」

真知香は，同じ縮小率で相似縮小した楕円をたくさん描い

た図を見せた。



「同じ縮小率で描いても，真ん中付近は真っ白になるのですね」

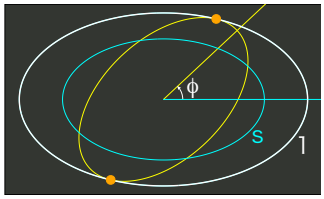
奈留沙がいったら，真知香は銀河の写真を見せた。

（写真提供：ESA/Hubble & NASA（Public Domain））

「これは楕円銀河 IC 2006 と呼ばれる銀河です。もし各星が相似で同じ軸をもつ楕円軌道を描いていたとしたら，中心付近は自然に星の密度が高くなって，そのおかげで白く光っているのだと思います」と真知香は，自身の考えを述べた。

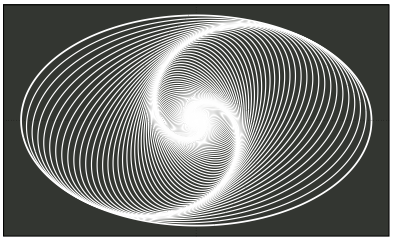
「これだけでは渦巻銀河を説明できません。銀河が渦を巻くことを理解するには，星は楕円軌道を描くことと，今日の初めに話した，ドットパターンの縮小・回転の考えを融合させる必要があります」。

次図のように，白色の楕円を s 倍に縮小させた楕円を青色とし，青色の楕円をもとの白色の楕円に接するまで回転させた楕円を黄色とする。



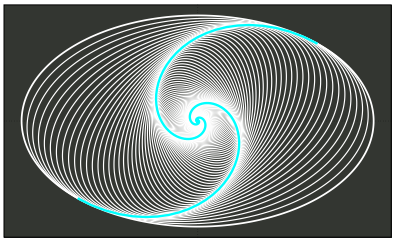
ここで，ϕ は接するまで回転した角度で，オレンジ色の 2 点は点対称の位置にある 2 つの接点である。

例えば，楕円の長径と短径の比を 5 : 3 とし，縮小率をドットパターンのときと同じ s = 0.97 として，楕円の縮小・回転を続けると 下図を得る。



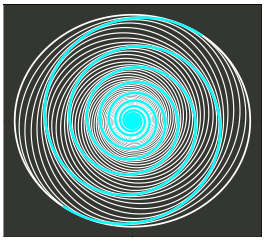
「白い部分は対数らせんですか」

夏太の問いに真知香は頷きながら「接点付近は楕円が密集しているので白くなります。この付近で楕円軌道を描く星の動きが遅くなり星が密集して，その結果白くなるというのが渦状構造密度波理論です。接点をたどると，2 本の対数らせんが描かれます」と青色で対数らせんを追加した図を見せた。

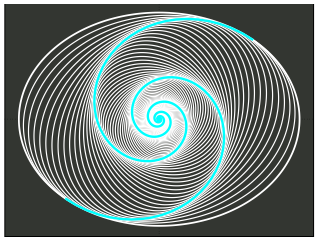


別の例を挙げよう。縮小率はそのままに，楕円の長径と短径の比を 5 : 4.5 に変えると，下図を得る。

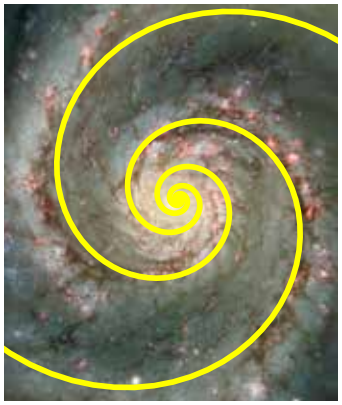
やはり，接点を結んだ青色の線は対数らせんとなる。



楕円の長径と短径の比が 5 : 3.8 だと下図のようになる。



下図は，このときの対数らせんを黄色にして，先ほどの渦巻銀河 M51 に重ねた図である。



「前回ははさみに対数らせんが使われていましたし，今回は，ドットパターンから，オウムガイ，台風，渦巻銀河に対数らせんが現れました。あまりのスケールの違いに目がくるくる回ってきました」と夏太がいったら，真知香がそのくるくるはどんならせんなのでしょうね，と微笑んで，今回の数楽実験室はお開きとなった。 ■