するには，200 気圧以上の圧力が必要となることがわかる．

$$\frac{0.01}{0.45 \times 10^{-9}} \cdot \frac{1}{101325} = 219.3\,\mathrm{atm} \quad (1\,\mathrm{atm} = 101\,325\,\mathrm{Pa})$$

ここで，atm は気圧 (標準気圧 (standard **atm**osphere)) の単位．家庭用の圧力釜は 2 気圧程度といわれており，200 気圧はその 100 倍である．例えば，ダイバーの 10 リットルタンクには，2000 リットルの空気が押し込まれており，これは 200 気圧である．また，水深 2000 メートルで約 200 気圧である (10 メートル潜るごとに 1 気圧上がる計算)．したがって，水風船のゴムの力では，水はまったく圧縮しないといってよい．

0.2　次元のべきの競争—クジラのように大きい鳥がいないのはなぜか

前節のような次元の考え方を用いると，次のような大きな動物の体重に関する「およその不等式」を示すことができる．

$$\text{海の動物 } 10^5 > \text{陸の動物 } 10^3 > \text{空の動物 } 10^1 \tag{0.1}$$

ここで，10^5 などの数字はキログラムで測った体重のオーダーである．例えば，シロナガスクジラは 190 トンなので，$1\,\mathrm{t} = 1000\,\mathrm{kg}$ から，

$$190\,\mathrm{t} = 1.9 \times 10^5\,\mathrm{kg}$$

である．このとき，体重は 10^5 kg のオーダーであるという．

◎— クジラはなぜ大きいのか—L の余裕

小見出しを言い換えると，クジラのように大きい陸上動物や鳥がいないのはなぜか，という問いである．

位については，第 1.4 節の表 $1.2_{(\mathrm{p}.36)}$，表 $1.3_{(\mathrm{p}.38)}$，表 $1.4_{(\mathrm{p}.39)}$ を参照．

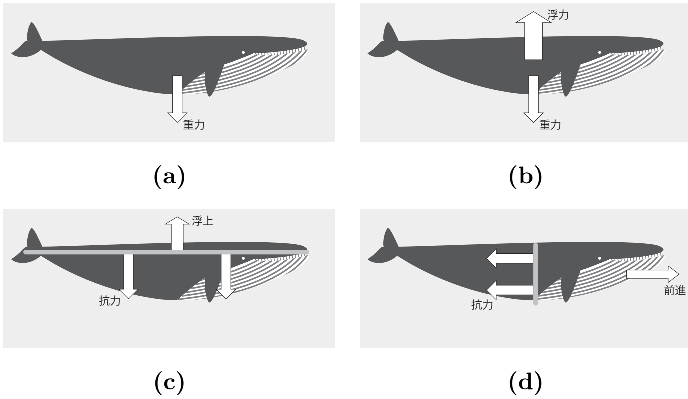

図 0.1　クジラに働く力

この問いの答えを，クジラに働く力だけから考察してみよう．まず，図 0.1 (a) のように，クジラには重力が働く．同時に，クジラは海中にいるので浮力も働く．図 0.1 (b) のように，浮力はクジラが排除した海水の重さの分だけ鉛直上向き (重力の反対方向) に働き，それはクジラの体積に比例する．また，クジラの密度を一定とすれば，前節でみたように，クジラの質量は体積に比例し，したがって (質量に重力加速度を掛けた) クジラの重さも体積に比例する．結局，浮力が重力に勝れば，すなわち，クジラの密度が海水の密度より小さければ，クジラは海中で浮いていられる．一方，浮上や前進する際に，海水の抵抗を受けるが，その抗力はクジラの断面積に比例する (図 0.1 (c)(d) の灰色棒)．抗力が面積に比例することは，第 2.3 節$_{\text{(p.59)}}$ において，次元解析によって示す．

結局，浮く力は体積に比例し，抗う力は面積に比例する．次元を考えると L^3 と L^2 の競争であるので，浮く方に L の分だけ余裕がある．これは 2 次関数よりも 3 次関数の方が早く増加するということに他ならない．

すなわち，図 0.2 のように，例えばどこかの x において 3 次関数が 2 次関数よりも小さくても，いつか—ある x_* より先—は 2 次関数よりも大きくなるということを主張している．だから，生物学的な考察を無視すれば，全長 30 メートル，体重 190 トンのシロナガスクジラのように大きくなることができる．船の方がもっと大きくできる．豪華客船，タンカー，空母などいずれも陸上や空中では考えられない大きさを可能にしているのは，L の余裕といえる．

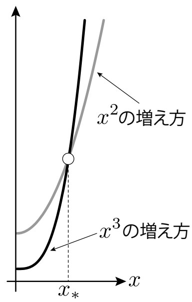

図 0.2　2 次関数と 3 次関数の増加の比較

◎— クジラのように大きな鳥はなぜいないのか—L の不足

空を飛ぶ動物，すなわち鳥について考える．

まず，鳥の重さが体積に比例するのはクジラと同様である．一方，鳥が飛行すると，写真 0.3 のように上向きに揚力が働く．揚力は抗力と同様に広げた翼の面積に比例するから，次元 L^3 と L^2 の競争となって，クジラの場合とは逆に，浮き上がる方は L の分だけ不足する．現在，羽ばたいて飛ぶ世界一重い鳥はアフリカオオノガン (学名：Ardeotis kori) と言われているが，体重はせいぜい 20 キログラム程度である．ジャンボジェット機は空を飛行しているが，エンジンが無ければ飛ぶことはできないので，鳥のような意味で飛んでいる訳ではない．もし，鳥の重さ

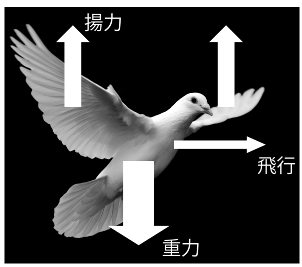

写真 0.3　鳥に働く力

が面積に比例すれば，次元 L^2 と L^2 の競争となって鳥がもっと大きくなれるかもしれない．第6.2節(p.164) において，その競争を象徴する簡単な実験を紹介しよう．

◎— 陸上の動物は?

海の動物は，L の余裕のおかげでクジラのように大きくなることができた．空の鳥は，L の不足のためにどこまでも大きくなるのは難しそうであることがわかった．では，陸の動物はどうだろう．例えば，写真 0.4 のようなゾウとその円柱による近似 (図 0.5) を考えてみよう．

写真 0.4　ゾウ

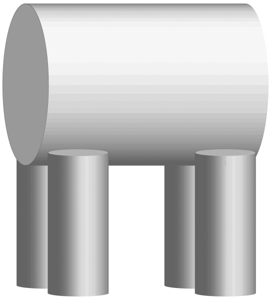

図 0.5　円柱モデル

陸では，海中で得られる浮力や翼による揚力という助けがないから，動物の体重は増えれば増えるほど，その体重を支える骨格，特に頑健な脚が必要となる．図 0.5 のような，動物を見立てた円柱模型を考えると，体重の増加にともなって，4 本の支柱の強度を上げるか，太くするしかなくなる．しかし，支柱は支柱自身の重さも支えなくてはならないから，支柱の強度や大きさにも限界がでてくる．結局この問題は，どこまでも高い木がない理由と類似している．詳しくは第7.3節(p.189) で吟味したい．

シロナガスクジラは 190 トン，アフリカゾウはせいぜい 10 トン (通常のゾウは数トン) といわれていることを考えると，陸に打ち上げられたクジラが自重を支えきれず身動きがとれなくなるのは，海中で余裕のあった L が，陸に上がることで無くなり，それに耐えうる骨格を持ち合わせていないことを物語っている．陸上の動物はクジラほど大きくはなれないが，飛んだり，速く走ったりする必要がなければ，自重を支える脚を強くして，鳥ほど軽くならなくても生活できる．以上の考察から，大きな動物の体重の不等式 $(0.1)_{\mathrm{p.5}}$ を得る．大きな動物に限っていえば，空，陸，海の順に 100 倍ずつ増えているのが面白い．動物のサイズについては，第 7 章$_{\mathrm{(p.175)}}$ でさらに詳しく検討する．

0.3　次元解析の簡単な導入—落下距離が時間の 2 乗に比例する理由

前節までの次元の扱いをさらに拡張して，異なる次元の組み合わせを通して現象を定性的に理解することを試みる．

本書では，運動している物体に関する量の関係の問題，すなわち時間経過とともに物体の何らかの量が変化する問題を多く扱う．生物も物体に含むとする．変化する代表的な量は，基準点からの距離である．そこでまず，ある物体の時刻 t における空間内の位置ベクトルを $\boldsymbol{x}(t)$ としよう．

物体の位置を定めることは，厳密には難しいが，物体を空間内の質点として，数学的には 3 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ における点として理想化し，その位置を明確に定めることができるとする．物体 (質点) の位置が不連続に移動することはないから，$\boldsymbol{x}$ は連続写像

$$\boldsymbol{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3; t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$$

である．$\mathbb{R}^3$ の基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, 0)$，$\boldsymbol{e}_2 = (0, 1, 0)$，$\boldsymbol{e}_3 =$