

第 5 章

振り子の運動と相対誤差

振り子を例に，次元解析から振り子の周期を求めることを第一の目標とし，次元解析では求まらない無次元量の値を実験や理論から算出することを第二の目標とする．また，微分や全微分を用いた相対誤差の数学的考え方を整理し，実験値が含むうる誤差を相対誤差から見積もる．

5.1 振り子の周期

図 5.1 のように，長さ l の紐の先に，質量 m の錘がぶら下がっている．

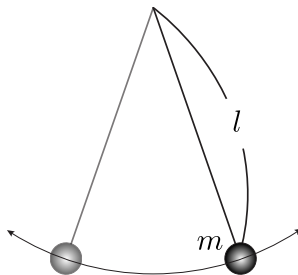


図 5.1 振り子

134 第5章 振り子の運動と相対誤差

重力のみにしたがって錘が振り子の運動をするとき、振り子の周期 p を求めよう。ただし、紐はピンと張っていて、曲がったり伸び縮みしないとし、紐の重さも考えない。また、振り子は(地面に垂直な)同一平面内を運動し、錘には抵抗など重力以外の力は働いていないものとする。

重力加速度を g とし、周期 p が関係式 $p = f(l, m, g)$ で定まるとしたとき、関数 f を次元解析で求めよう。表 5.1 は各量の次元である。

量	記号	次元
周期	p	T
紐の長さ	l	L
錘の質量	m	M
重力加速度	g	LT ⁻²

表 5.1 振り子の周期に必要な量

これより、次元行列を構成し、それに行の基本変形を施すと、以下のようなになる。

$$\begin{array}{c} \text{L} \\ \text{M} \\ \text{T} \end{array} \begin{array}{c} l \quad m \quad g \quad p \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right) \end{array} \xrightarrow{\text{行の基本変形}} \begin{array}{c} l \quad m \quad g \quad p \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array} \right) \end{array}$$

よって、無次元量

$$\Pi = \frac{p}{l^{\frac{1}{2}} g^{-\frac{1}{2}}}$$

を得る。すなわち、周期は、適当な無次元量 C を用いて次のように表される。

$$p = C \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (5.1)$$

5.1 振り子の周期 135

よって、周期は錘の質量には無関係に、周期の2乗がひもの長さに比例することがわかる． C の値は次元解析では求まらないが、簡単な実験から値を求めることはできる．

◎— C の値を実験で求める

(5.1) から、

$$p^2 = \alpha l \quad \left(\alpha = \frac{C^2}{g} \right) \quad (5.2)$$

と書くことができる．以下の実験から α の値を求め、それを $C = \sqrt{\alpha g}$ に代入して C の値を求める．

準備 5.1 (たこ糸や焼き豚用のような) ひも、錘 (例えば、大きめのナット)．写真 5.2 のように、ひもに錘から長さ 25cm と 1m の位置に印をつける．

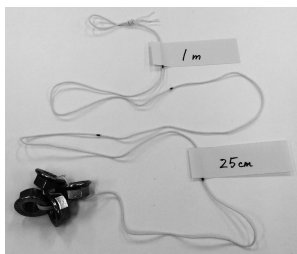


写真 5.2 お手製の振り子

実験 5.1 (1) ひもの 25cm の位置をつまんで、錘を振って、振り子の 1 周期 (往復) の時間を測る．1 周期だけだと誤差が大きいから、例えば、

10 周期を測定し、結果を 10 で割って 1 周期を算出

136 第5章 振り子の運動と相対誤差

するとよい.

(2) ひもの1mの位置をつまんで, (1)と同じことをする.

(3) (1)(2)の結果と(5.2)から α の値を求め, それを $C = \sqrt{\alpha g}$ に代入して C の値を求める.

表 5.2 は, 実験から得られた周期 p を用いて, $\alpha = \frac{p^2}{l}$ と計算した. これより, $C = \sqrt{4g} \doteq 6.26$ を得る.

紐の長さ (m)	周期の実験結果 (s)	α の値 (s^2/m)
0.25	1	4
1	2	4

表 5.2 周期の実験結果

◎— 相対誤差からの検証

微分 (2.52)_{p.82} を用いて, ひもの長さの相対誤差から周期の相対誤差を求めよう. $p(l) = \sqrt{\alpha}\sqrt{l}$ のように p を l の関数とみると, p の微分は

$$dp = \frac{\sqrt{\alpha}}{2\sqrt{l}} dl$$

である. これより,

$$\frac{dp}{p} = \frac{\sqrt{\alpha}}{2\sqrt{l}} \frac{1}{\sqrt{\alpha}\sqrt{l}} dl = \frac{1}{2} \frac{dl}{l} \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{dp}{p} \right| = \frac{1}{2} \left| \frac{dl}{l} \right|$$

がわかる.

例 5.1 (重心からの距離が)1 m のひもの位置が最大 1 cm ずれていたらとすると相対誤差は

$$\left| \frac{dl}{l} \right| \leq \frac{1}{100} = 1\%$$

なので、周期にはその半分の $\left| \frac{dp}{p} \right| \leq 0.5\%$ 程度の相対誤差が見込まれる。0.005 秒 (1 秒の 0.5%) の誤差は測れないから、多少位置がずれてもまったく問題ないことがわかる。(むしろ振り子を手で持って 10 周期を測る誤差の方が大きいだろう。)

だからこの実験は(粗くやっても)結構うまくいく。

5.2 相対誤差

少し横道にそれるが、ここで微分や全微分を用いた相対誤差の数学的な考え方をまとめておこう。本章の目的は、振り子を例に、次元解析から振り子の周期を求め、次元解析では求まらない無次元量の値を実験や理論から算出することである。その際、実験値がどの程度誤差を含みうるかがわからなければ、理論値との比較に説得力がなくなる。そういった意味から、相対誤差の考え方を一旦整理しておくことはそれほど横道でもないだろう。

◎— 微分と相対誤差

与えられた微分可能な関数 $y = f(x)$ について、入力 x に誤差が含まれていた場合、出力 y にその誤差はどれほどの影響を及ぼすかを見積もる。

入力誤差は x の増分 Δx 、出力誤差は y の増分 Δy である。このとき、 $(2.51)_{p.81}$ から、

$$\Delta y = dy + o(dx), \quad dy = f'(x) dx, \quad \Delta x = dx$$

が成り立つ。入力誤差 dx が小さければ、出力誤差 Δy は微分 dy で近似できる。したがって、出力値 y の相対誤差 $\frac{\Delta y}{y}$ は、入力値 x の