

第3章

次元解析と他の解析の比較：車は急に止まらない

車の停止距離を例にとり、データ解析、次元解析、運動方程式の漸化式版と微分方程式版を用いた解析の4つの方法で比較する。データ解析は具体的な数値データから量の関係式を導くため、係数は数値となり、その数値の意味を捉えるのは難しい。一方、運動方程式を用いた解析は、方程式を解けばいろいろとわかるし、解かなくても(解けなくても)解の定性的な性質がわかることも多いが、その解析は一般的に数居が高い。いわばこれらの解析の中間に位置するのが次元解析だ。次元の関係から量の関係式を導くため、係数は無次元量として与えられる。具体的な係数の値はわからないが、関係式の意味は捉えやすく、定性的な情報も得やすい。何より関係式の導出が圧倒的に簡単である。

3.1 停止距離

一直線(x 軸)上を質量 m の車が一定速度 $v_0 > 0$ で走っている。いま、ブレーキを踏んで、緊急停止しなければならなくなった。ブレーキを踏もうと思ってから、実際に車が停止するまでの距離に v_0 がどのように依存しているのかを調べたい。以下のように二つの過程に分けて考える。

90 第3章 次元解析と他の解析の比較：車は急に止まらない

過程 1 ブレーキを踏もうと思い立ってから、実際にブレーキが効き始めるまでの過程。かかった時間を**反応時間** R とし、その間に車が移動した距離を**空走距離** L_0 とする。

過程 2 ブレーキが効き始めてから車が完全に停止するまで、すなわち速度 0 になるまでの過程。かかった時間を**制動時間** t_s とし、その間に車が移動した距離を**制動距離** L_1 とする。

空走距離と制動距離を合わせた $L_0 + L_1$ を**停止距離**と呼ぶ (図 3.1)。

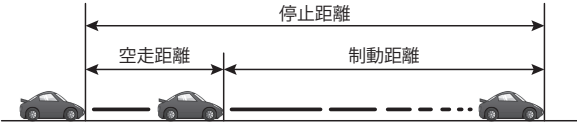


図 3.1 停止距離

表 3.1 は、トヨタ中央自動車学校 [104] に掲載されていた停止距離のデータである。ただし「空走時間を 1 秒とし、乾燥した舗装路面で急ブレーキをかけた場合の最短の停止距離」という注意書きがある。国土交通省・国土技術政策総合研究所 (国総研) の資料 [81] をみると、制動距離に直接関わるタイヤの摩擦抵抗力の値を出すために、実に詳細に条件を設定した比較実験を行っている。すなわち、制動距離は路面の状況やタイヤの状態など多くの条件を要因として定まる距離なのである。したがって、表 3.1 の停止距離のデータは一つの目安と捉えるのがよいだろう。

図 3.2 は、表 3.1 のデータをもとにして作った棒グラフである。数値は違えど、このような棒グラフをみたこともある読者もいるだろう。まったく車は急に止まらないことがよくわかる。我々がブレーキで制御できるのは車の速度ではなく、車にかかる力である。そして力の制御を通して加速度を変化させることができることは、運動方程式 $(0.8)_{p.13}$ の教えるところである。

3.1 停止距離 91

速度 (km/h)	空走距離 (m)	制動距離 (m)	停止距離 (m)
20	6	3	9
30	8	6	14
40	11	11	22
50	14	18	32
60	17	27	44
70	19	39	58
80	22	54	76
90	25	68	93
100	28	84	112

表 3.1 各速度に対する空走距離, 制動距離, 停止距離のデータ [104]

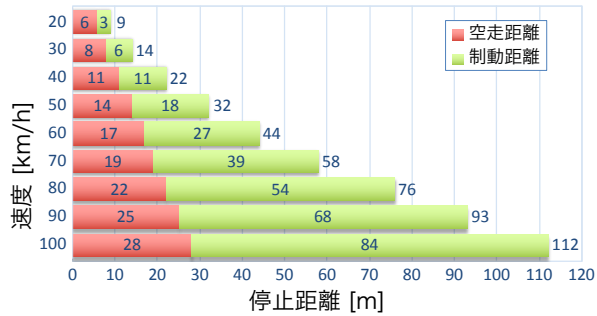


図 3.2 速度と停止距離 (表 3.1 の棒グラフ)

本章では, 空走距離と制動距離のそれぞれに対する v_0 の依存性を, 以下の四つの解析手法で導いてみよう.

- 第 3.2 節_(p.92) データの近似解析
- 第 3.3 節_(p.94) 次元解析
- 第 3.4 節_(p.98) 漸化式 (運動方程式 (0.4)_{p.12}) による解析
- 第 3.5 節_(p.101) 運動方程式 (0.8)_{p.13} による解析

3.2 データの近似解析

与えられた2次元散布図データから何をどのように読み取るか。以下、最小二乗法を使ってデータの近似解析を試みよう。最小二乗法は最も基本的なデータ解析手法の一つである。その原理は「二変数関数の極値問題」に帰着されるので、厳密な証明は微分積分学の教科書に委ねる。ここでは、表計算ソフトに組み込まれている近似曲線の機能を使って、データから近似関数を求めることにする。表計算ソフトはいくつも知られている¹⁾。

◎— 最小二乗近似

表計算ソフトを用いて、表 3.1_(p.91) のデータから、空走距離は原点を通る v_0 の1次関数、制動距離は原点を通る v_0 の2次関数を用いてそれぞれ近似できることを示そう。

表計算ソフトを用いて、表 3.1 のデータを、横軸に速度、縦軸に空走距離と制動距離をとり座標平面上にプロットする。図 3.3 のようになるだろう。

空走距離はデータの点が直線状に並んでいるように見えるから直線で近似する。ただし、速度が0のとき空走距離も0であるから、その直線は原点を通る直線に制限する。(もちろん、表 3.1 の空走距離のデータは v_0 の1次関数として作っているのだから、原点を通る直線になるのは当たり前なのだが、いまはそれを知らないとして近似直線を求める。)

制動距離のデータの点は直線状に並んでいるように見えない。

¹⁾ 例えば、有償のものではマイクロソフト社のエクセル (Excel) などがあり、無償 (フリー) のものではグーグル・スプレッドシート (Google spread sheet) やオープンオフィス・カルク (OpenOffice Calc) などがある。いずれのソフトにも近似曲線の描出に相当する機能が備わっている。(名称はトレンド線 (Trendline) など多少異なる。)

3.2 データの近似解析 93

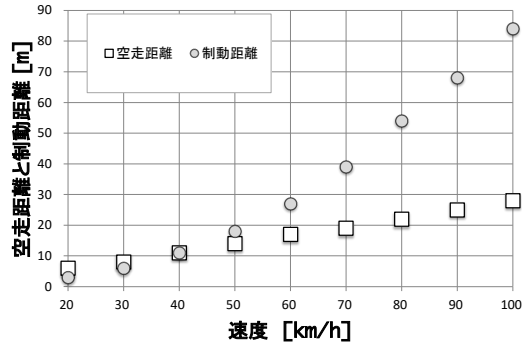


図 3.3 空走距離・制動距離 vs. 速度

当たりをつけて、放物線関数 (2 次関数) か指数関数近似を考える。データの数が少ないし、なるべく説明のしやすい関数がよいので、まずはあまり複雑な関数は考えない。表 3.1_(p.91) のデータの場合、速度が 0 のとき制動距離も 0 であることを課して、結果として、放物線近似がよさそうだということがわかる。(片対数、あるいは両対数グラフを考えると、冪指数のみに注力できるので有効であることが多い。両対数の威力が発揮されたグラフについては図 7.1_(p.176) 参照。)

図 3.4 は、表 3.1 の空走距離の点データを直線近似し、制動距離の点データを放物線近似した場合の各グラフを描いたものである。

図 3.4 から、 $L_0, L_1 = y$ m, $v_0 = x$ km/h とおくと、それぞれ

$$L_0 \text{ vs. } v_0: y \doteq 0.2776x \doteq 0.3x$$

$$L_1 \text{ vs. } v_0: y \doteq 0.0094x^2 - 0.0982x \doteq (0.1x)^2$$

という関係にあることがわかった。このことから、標語的に「空走距離は速度の 3 割、制動距離は速度の 1 割の 2 乗」が目安となる。この値は大雑把な見積りのようにも見えるが、表 3.1_(p.91) は乾いた舗装道路で急ブレーキをかけた場合のデータで、路面が濡れてい

94 第3章 次元解析と他の解析の比較：車は急に止まらない

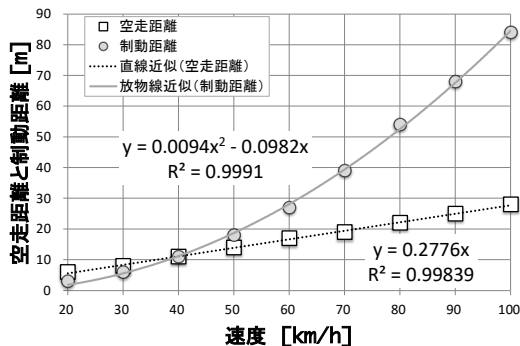


図 3.4 空走距離・制動距離 vs. 速度

たり凍結しているようなより滑りやすい場合は、この大雑把な見積もりよりも大きな値をとるであろうことを考えると、現実的に知っておくべき見積もりになっているといつてよいだろう。

問 3.1 図 3.4_(p.94) における空走距離の近似直線の係数から、反応時間 R は約 1 秒と近似できることを示せ。 ■

このように綺麗に R は約 1 秒と近似できた理由は、上で述べたように、表 3.1_(p.91) の空走距離のデータは反応時間が 1 秒の速度の 1 次関数として作っているからである。実際、 $L_0 = y$ m, $v_0 = x$ km/h, $R = 1$ s とおくと、

$$L_0 = v_0 R \Leftrightarrow y \text{ m} = 1 \text{ s} \times x \text{ km/h} = \frac{x}{3.6} \text{ m}$$

から、 $x = 20, 30, \dots, 100$ に対する y の小数点以下第 1 位を四捨五入した値が、表 3.1 の空走距離のデータである。

3.3 次元解析

空走距離 L_0 と制動距離 L_1 それぞれの v_0 依存性を次元解析を用

いて算出しよう.

◎— 次元解析で空走距離を求める

空走距離 L_0 が関係式 $L_0 = f(R, v_0)$ で定まるとしたとき, 関数 f を次元解析で求めよう. 表 3.2 は各量の次元である.

量	記号	次元
空走距離	L_0	L
反応時間	R	T
速度	v_0	LT^{-1}

表 3.2 空走距離に必要な量

レイリー・アルゴリズム (16 ページ) に従って, 次元の関係式を

$$[L_0] = [R]^\alpha [V_0]^\beta \quad \Leftrightarrow \quad L = T^\alpha (LT^{-1})^\beta = L^\beta T^{\alpha-\beta}$$

とおく. これより, 指数 α, β の満たす式

$$\begin{cases} L : \beta = 1 \\ T : \alpha - \beta = 0 \end{cases}$$

を解いて, $\alpha = \beta = 1$ を得る. よって, C を無次元量として,

$$L_0 = C v_0 R \tag{3.1}$$

を得る. $C = 1$ かどうかは, 次元解析からは決定できないが, 積極的に無次元量 C の意味づけをするならば, 例えば, 年齢, 性別, 経験などによる反応時間 R の係数と考えることもできる. 実際, 反応時間の平均値は 1 秒といわれているが, 例えば高齢者の反応時間は 1.5 秒という指摘もある. したがって, $R = 1\text{s}$ を標準的な反応時間としておいて, それに係数 C かけた CR が個別の反応時間と捉えることもできるであろう.

96 第3章 次元解析と他の解析の比較：車は急に止まらない

◎— 次元解析で制動距離を求める

制動距離 L_1 が関係式 $L_1 = f(v_0, m, F)$ で定まるとしたとき、関数 f を次元解析で求めよう。表 3.3 は各量の次元である。

量	記号	次元
制動距離	L_1	L
速度	v_0	LT^{-1}
車の重量	m	M
停止に必要な力	F	MLT^{-2}

表 3.3 制動距離に必要な量

次元の関係式を

$$[L_1] = [v_0]^\alpha [m]^\beta [F]^\gamma$$

$$\Leftrightarrow \text{L} = (\text{LT}^{-1})^\alpha \text{M}^\beta (\text{MLT}^{-2})^\gamma = \text{L}^{\alpha+\gamma} \text{M}^{\beta+\gamma} \text{T}^{-\alpha-2\gamma}$$

とおく。これより、両辺の指数を比べて、対応する連立一次方程式

$$\begin{cases} \text{L} : \alpha + \gamma = 1 \\ \text{M} : \beta + \gamma = 0 \\ \text{T} : -\alpha - 2\gamma = 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

を解けばよい。これがレイリー・アルゴリズムであった。このまま解いてもよいのだが、見通しをよくするために、行列の行の基本変形を用いてみよう。

◎— 次元行列に行の基本変形を施す

連立一次方程式 (3.2) は、行列とベクトルを用いて次のように表現できる。

$$\begin{array}{l} \text{L} \rightarrow \\ \text{M} \rightarrow \\ \text{T} \rightarrow \end{array} \underbrace{\begin{pmatrix} v_0 & m & F \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}}_{\text{係数行列}} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{l} \text{L} \rightarrow \\ \text{M} \rightarrow \\ \text{T} \rightarrow \end{array} \underbrace{\begin{pmatrix} v_0 & m & F & L_1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{拡大係数行列}} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

連立一次方程式を解くことは、拡大係数行列に行の基本変形を施すことに他ならない(線形代数学で学ぶであろう)。次元行列は拡大係数行列に対応するから、表 3.3(p.96) から対応する次元行列を構成し、それに行の基本変形を施せば、連立一次方程式の解を得る。(行の基本変形については注意 2.1(p.76) を参照。) 連立一次方程式が不定であれば解に自由度が出る。その自由度が無次元量の個数に相当することが II 定理 2.4(p.71) の主張である。

上の拡大係数行列に行の基本変形を施すと、次のようになる。

$$\begin{array}{l} \text{L} \\ \text{M} \\ \text{T} \end{array} \begin{pmatrix} v_0 & m & F & L_1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行の基本変形}} \begin{pmatrix} v_0 & m & F & L_1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

よって、右の行列の縦線より左側の量の組 $\{v_0, m, F\}$ は独立した次元をもち、縦線より右側の量 L_1 はこれらに従属した次元をもつことがわかる。

これより、無次元量の関係式

98 第3章 次元解析と他の解析の比較：車は急に止まらない

$$\Pi = \frac{L_1}{v_0^2 m F^{-1}}$$

を得る．すなわち， C を無次元量として

$$L_1 = C \frac{m}{F} v_0^2 \quad (3.3)$$

となって，制動距離 L_1 が v_0 の2乗に比例することがわかる．これは前節で得られた結果に違わない．

問 3.2 (制動時間) 制動時間 t_s を関係式 $t_s = f(v_0, m, F)$ で定めたとき，関数 f は次元解析で，

$$t_s = C \frac{m}{F} v_0 \quad (3.4)$$

と求められることを示せ (C は無次元量)． ■

注意 3.1 (3.3) の制動距離 L_1 と (3.4) の制動時間 t_s は，見かけ上，質量 m に比例している．しかし，重力加速度 g と動摩擦係数 μ' を用いて， $F = \mu' mg$ のように力が車の重量に比例するとしたら， $L_1 = C \frac{v_0^2}{\mu' g}$ ， $t_s = C \frac{v_0}{\mu' g}$ のように，車の質量に無関係な結果を得る．はじめから L_1 ， t_s が v_0 ， m ， μ' ， g だけから定まるとして次元解析を用いて求めても， $L_1 = C(\mu') \frac{v_0^2}{g}$ ， $t_s = C(\mu') \frac{v_0}{g}$ となって同じ結果を得る (次元は $[\mu'] = 1$ ， $[g] = \text{LT}^{-2}$ である)．また，後述の問題 3.4_(p.101) で μ' の具体的な数値を求めているので参照されたい．

3.4 漸化式 (運動方程式 (0.4)) による解析

前節で求めたさまざまな量を求める．特に制動時間と制動距離を漸化式 (運動方程式 (0.4)_{p.12}) を用いて求めよう．まず，反応時間 R

3.4 漸化式 (運動方程式 (0.4)) による解析 99

の間に車は一定速度 v_0 で動いているから、空走距離は

$$L_0 = v_0 R$$

である。これは $(3.1)_{p.95}$ で $C = 1$ のときに相当する。

次に、制動時間 t_s を求め、それから制動距離 L_1 を求める。ブレーキが効き始めた時刻を $t = 0$ とする。ブレーキの性能、運転者の技量、路面の状況などにもよるが、制動時間 t_s の間、車の進行方向と逆向きにある一定の力 $F > 0$ が働き続け、時刻 $t = t_s$ で車が停止したとする。いま、車の外部にいる観測者が一定時間間隔 Δt おきに車の位置を計測していて、

$$t_n = n\Delta t \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad t_{N-1} < t_s \leq t_N$$

であったとする。 $t_{N-1} < t_s < t_N$ のときは、 $N - 1$ 回目と N 回目の計測の間で車が停止したときで、 $t_s = t_N$ のときは、ちょうど N 回目の計測で車が停止したときである。

x_n を時刻 t_n における車の位置とする。計測しているのは位置のみであるから、時刻 t_n における (瞬間の) 速度はわからないが、時間区間 $[t_{n-1}, t_n]$ における平均速度はわかる。

$$v_n = \frac{x_n - x_{n-1}}{\Delta t} \quad (n = 1, 2, \dots, N)$$

これを時刻 $t'_n = \frac{t_{n-1} + t_n}{2}$ のときの速度とする。また、仮定から $t'_0 < 0$ のときの速度は一定速度 v_0 であり、時刻 t'_{N+1} のときの速度は停止後だから $v_{N+1} = 0$ とする。

時刻 t_n を含む時間区間 $[t'_n, t'_{n+1}]$ における運動量の変化量は Δt 時間に作用した力に等しく、その力は車の進行方向に一定の力 $-F < 0$ である。よって、運動方程式 $(0.4)_{p.12}$ から、

$$mv_{n+1} - mv_n = -F\Delta t \quad (n = 0, 1, 2, \dots, N) \quad (3.5)$$

100 第3章 次元解析と他の解析の比較：車は急に止まらない

となる.

(3.5) の両辺を $n = 0, 1, 2, \dots, N$ について和をとると, $v_{N+1} = 0$ より $-mv_0 = -F(t_N + \Delta t)$ を得る. よって, 計測の最終時刻は $t_N = \frac{mv_0}{F} - \Delta t$ であることがわかる. これより, 制動時間 t_s は

$$\frac{mv_0}{F} - 2\Delta t < t_s \leq \frac{mv_0}{F} - \Delta t \quad (3.6)$$

を満たす. このとき, 次元解析で求めた (3.4)_{p.98} の C は,

$$1 - \frac{2F}{mv_0}\Delta t < C \leq 1 - \frac{F}{mv_0}\Delta t \quad (3.7)$$

の範囲にある. ゆえに $\Delta t \approx 0$ ならば $C \approx 1$ である.

以上は, 制動がかかった車の停止という観点からの議論であるが, 逆に与えられた制動時間 t_s で車を停止したい場合を考える.

力 F の範囲を (3.6) から求めると, $\Delta t \leq t_s$ として,

$$\frac{mv_0}{3t_s} \leq \frac{mv_0}{t_s + 2\Delta t} < F \leq \frac{mv_0}{t_s + \Delta t}$$

となる. これより, 与えられた制動時間 t_s で車を停止するためにはどのくらいの力 F が必要かがわかる. すなわち, この不等式から運動量 mv_0 が大きいほど (重くて速い車ほど), 制動時間 t_s が短いほど, それだけ大きな力が必要となることがいえる. これは直観通りである. 力が直接コントロールできるのは, 運動量の変化率, 加速度であって, 速度ではない. だから, 車は急に止まらない.

問 3.3 制動距離 $L_1 = x_N - x_0$ はほぼ v_0 の 2 乗に比例して,

$$L_1 = c \frac{m}{2F} v_0^2, \quad c = 1 - \frac{F}{mv_0} \Delta t$$

となることを示せ. ■

3.5 運動方程式 (0.8) による解析 101

これは、次元解析で求めた (3.3)_{p.98} において、 $C = \frac{c}{2}$ に相当する。

問 3.4 (動摩擦係数) Δt を小さいとして $c = 1$ とする。重力加速度 $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ と動摩擦係数 μ' を用いて、 $F = \mu' mg$ のように力が車の重量に比例するとしたら、制動距離は $L_1 = \frac{v_0^2}{2\mu' g}$ となる。 μ' は無次元量である。このとき、データの近似解析の結果の図 3.4_(p.94) において、制動距離を 2 次関数で最小二乗近似したときの x^2 の係数 0.0094 と比較して、動摩擦係数 μ' の値がおおよそ 0.42 となることを示せ。図 3.4 の y の単位は m、 x の単位は km/h であることに注意せよ。 ■

力 F が質量 m に比例する場合、制動時間 t_s は m に依存せず動摩擦係数 μ' に反比例する。問題 3.4 のように μ' の値は定数に近いため、結局 t_s は速度 v_0 に比例する。やはり、車は急に止まらない。

3.5 運動方程式 (0.8) による解析

空走距離が $L_0 = v_0 R$ となることは前節と同じである。制動距離 L_1 を運動方程式 (0.8)_{p.13} を用いて導出する。

一直線 (x 軸) 上を質量 m の車が一定速度 $v_0 > 0$ で走っていて、 $x(t)$ を時刻 t における車の位置とする。いま、ブレーキを踏んで、緊急停止しなければならなくなった。反応時間が過ぎて、ブレーキが効き始めた時刻を $t = 0$ とし、その後、車の進行方向と逆向きにある一定の力 $F > 0$ が働き続け、ちょうど時刻 $t = t_s$ で車の速度を 0 にできたとする。このとき、運動方程式 (0.8) と初期時刻、最終時刻における値から、

102 第3章 次元解析と他の解析の比較：車は急に止まらない

$$\begin{cases} \dot{x}(0) = v_0 \\ m\ddot{x}(t) = -F \quad (0 < t < t_s) \\ \dot{x}(t_s) = 0 \end{cases}$$

である．第2式を $[0, t]$ で積分すると，

$$\dot{x}(t) - v_0 = -\frac{F}{m}t \quad (3.8)$$

を得る．特に， $t = t_s$ のとき，制動時間は，

$$t_s = \frac{mv_0}{F}$$

となる．これは，次元解析で求めた $(3.4)_{\text{p.98}}$ において， $C = 1$ に相当する $((3.7)_{\text{p.100}}$ も参照)．したがって，

$$F = \frac{mv_0}{t_s}$$

であるから，前節の最後に述べた通り，車は急に止まらない．

また，(3.8) を $[0, t_s]$ で積分すると，

$$x(t_s) - x(0) - v_0 t_s = -\frac{F}{2m} t_s^2$$

となる．これより，ブレーキが効き始めてから車が止まるまでの制動距離

$$L_1 = x(t_s) - x(0) = v_0 t_s - \frac{F}{2m} t_s^2 = \frac{m}{2F} v_0^2$$

を得る．よって，制動距離 L_1 が v_0 の2乗に比例することがわかった．これは，次元解析で求めた $(3.3)_{\text{p.98}}$ において， $C = \frac{1}{2}$ に相当する (問 3.3_(p.100) も参照)．