

第 7 章

動植物の大きさの法則

まえがきにおいて、ジャックの豆の木や巨大化したノミの話について触れた。第 0 章^(p.1)において海、空、陸の大きな動物の大きさについて考察した。第 4 章^(p.103)では小動物の仮想的巨大化についてガリレオ・ガリレイの見解を紹介した。動物や植物などの大きさに何か法則はあるのだろうか。本章では、次元解析をもとに動植物の大きさの法則を考察する。

7.1 クレイバーの $\frac{3}{4}$ 乗則

第 4 章の図 4.1^(p.105)で小動物を仮想的に巨大化させたとき、その骨はどのように大きくなるか、大きくなるべきかについて、ガリレオ・ガリレイの見解の絵を紹介した。このことは、ネズミのような小動物をそのまま相似拡大してゾウのように巨大化しても、陸上動物として成立しないことを示唆している。小さなネズミと大きなゾウに何か共通する性質はあるのだろうか。

ネズミもゾウも含めた多くの恒温動物のエネルギー消費量と大きさ(体重)について、図 7.1 のようなグラフが知られている。小さなネズミから大きなゾウまでほとんどの恒温動物が同じ直線上に乗っている。これは代謝の仕組みに共通した法則が見いだせることを示

176 第7章 動植物の大きさの法則

している。

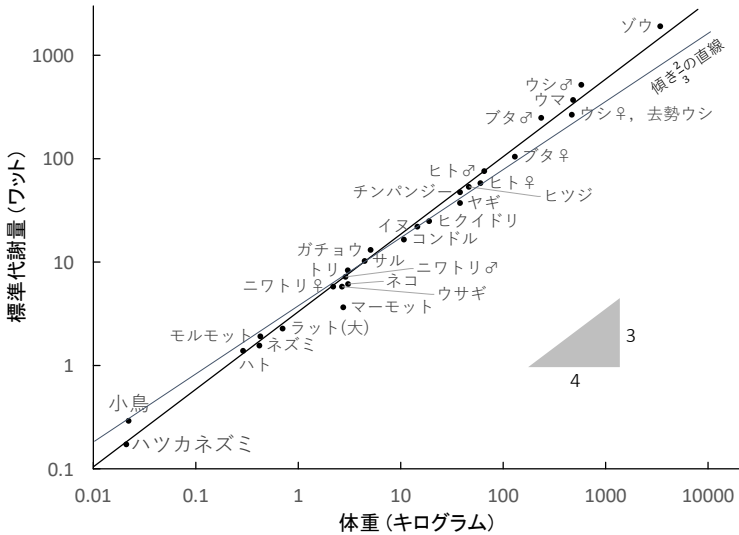


図 7.1 Schmidt-Nielsen[89] をもとに作成. 傾き $\frac{2}{3}$ の直線と三角形は筆者が追加した。

図 7.1 について詳しく吟味しよう。生命維持のために必要なエネルギーは、食物の化学エネルギーが由来である。摂取した化学エネルギーは、活動に必要なエネルギーへと変換され消費される。この変換の速さを代謝率という。さまざまな恒温動物に対して等しい条件のもとでエネルギー消費量を測るために、絶食させて、暑くも寒くもない状態で安静にさせる。そのときのエネルギー消費量を標準代謝量といい、これを E_s と表そう。単位はワットである¹⁾。エネルギー消費量の計測の代わりに、計測しやすい酸素消費量(単位時間あたりどれだけの酸素を消費したか、すなわち代謝の速度

¹⁾ ワットは毎秒 1J のエネルギーを消費する (仕事をする) 単位 ($W = J/s$)。ジュールはエネルギー、仕事、熱量の単位 ($J = Nm$)。表 1.3(p.38) 参照。

7.1 クレイバーの $\frac{3}{4}$ 乗則 177

(代謝率))から、酸素1リットルを20.1 kJのエネルギーに換算して E_s を算出する。こうして、対象とする動物の体重 W を横軸、対応する E_s を縦軸にとった両常用対数グラフが図7.1である。図7.1は、1984年のSchmidt-Nielsen[89]のFigure 6.1_(p.57)をもとに作成したものである(邦訳版は図6.1_(p.65))。同様の図は1992年の本川[71]の図3-1_(p.27)にも見られる。いずれの図もおおもとは1938年のBenedict[29]のFig. 45_(p.171)である。

図7.1において、データの各点は両対数グラフで直線上に分布しているとしてよいから、その直線の傾きを a 、縦軸の切片を b とすると、

$$\log_{10} E_s = a \log_{10} W + b$$

すなわち、 C を適当な有次元量の正定数として、

$$E_s = CW^a$$

のように、標準代謝量は体重のべき乗に比例することがわかる。

図7.1_(p.176)の場合 $a = \frac{3}{4}$ だから、標準代謝量は体重の $\frac{3}{4}$ 乗に比例する。すなわち、

$$E_s \sim W^{\frac{3}{4}} \quad (7.1)$$

が成り立つ。これをクレイバーの $\frac{3}{4}$ 乗則と呼ぶ。($A \sim B$ は A は B に比例し、 B は A に比例するという意味の同値関係。)

◎— ネズミ〜ゾウ曲線

1800年代にはすでに動物のサイズと代謝の関係について多くの研究がなされ、データも相当蓄積されていた。当時は代謝は動物の表面積に比例するいわゆる「**表面積の法則**」が信じられていた。そのような共通感覚が常識的であったころ、1932年のクレイバーは論文『体のサイズと代謝率 (Body size and metabolism)』[59]

178 第7章 動植物の大きさの法則

を発表し、その中で図 7.1_(p.176) のおおもといえる図を提示した (Figure 1_(p.321)). すなわちクレイバーは、平均体重 0.15 kg のハト (ring dove) から平均体重 679 kg の去勢ウシ (steer) まで、最大 4000 倍以上の体重の違いをもつ 13 種の動物グループについて、縦軸に一日当たりの代謝率 (kcal/day), 横軸に体重 (kg) の両対数グラフを作成し、13 種のデータの各点が直線状に分布していることを提示し、その直線の傾きが 0.74 であることを示した²⁾. その後、1934 年に Brody ら [30] は大幅に動物の種類を増やして、0.035 kg のハツカネズミから 3833 kg のゾウまでの最大 10 万倍以上の体重の違いをもつ 69 種の動物グループについて、代謝率と体重の関係を調べ、いわゆる「ネズミ〜ゾウ曲線」を発表した (Fig. 1_(p.12)). ネズミ〜ゾウ曲線も直線であり、その傾きを 0.734 と結論づけた.

直線の傾きは 0.75 ちょうどであるのか、そうでないのか. 小数点以下第 2 位の値は、実験の年代も場所も動物の環境も異なることから生まれた実験的・統計的な不確かさを含んでいる. また、0.75 にすると計算しやすいことからクレイバーは直線の傾きを 0.75 とした. (1932 年当時は当然電卓もないのだから、 $\log_{10} W$ の値は対数表などを使って手計算で算出していたはずである. $\frac{3}{4}$ 倍は 0.74 倍や 0.734 倍よりも遙かに楽に計算できる.) 図 7.1_(p.176) の直線 (太線) の傾きは底辺 4、高さ 3 の直角三角形の傾きと同じ 0.75 であるが、もしかしたら本当は直線でないのかもしれない. 実際、2013 年の小山ら [60] によれば、図 7.1 の直線は、少し曲がった曲線になることが報告されているようである.

²⁾ シュミットニールセン [89] の脚注 2_(p.58) (邦訳版は脚注 2)_(p.66)) によれば、当時は酸素 1 リットルを 4.8 kcal としてエネルギーに換算していたようである. 1934 年のプロディら [30] の Fig. 1_(p.12) の縦軸の単位もカロリーだった. カロリー cal はエネルギー (熱量) の単位で、1 cal = 4.184 J である. 現在も栄養学などの分野で使われている. SI 単位ではない.

7.1 クレイバーの $\frac{3}{4}$ 乗則 179

しかし、第1次近似として直線を採用したとしても、多くの実験結果が傾き $\frac{3}{4} = 0.75$ 程度になっていることは驚異的である。素朴に考えれば、酸素の消費量は肺の表面積に比例し、熱の放出は体表面積に比例するから、 E_s は次元が L^2 である量に比例するとしてよいだろう。一方、体重は体積に比例するから W は次元が L^3 である量に比例する。これより E_s は W の $\frac{2}{3}$ に比例することがわかる。これが上で述べた表面積の法則であり、クレイバー以前に広く浸透していた考えである。図 7.1_(p.176) に比較のために傾き $\frac{2}{3}$ の直線を描いたが、傾き 0.75 からのちょっとした誤差とは言いがたい違いがみられる。したがって、重要なことは傾きは $\frac{3}{4}$ 程度ではあるが、 $\frac{2}{3} = 0.67$ ではないことである。クレイバーがきりの良い 0.75 を採用した本質的な理由はここにある。

◎— 体重の $\frac{1}{4}$ 乗則

クレイバーの $\frac{3}{4}$ 乗則 (7.1)_{p.177} にもとづく以下のような面白い考察がなされる。上でみたように E_s は単位時間あたりの酸素消費量 — R としよう— に比例するから、

$$E_s \sim R$$

である。一方、シュミットニールセン [89] によれば、哺乳類や鳥類の体重 W はほぼ肺の体積 — V としよう— に比例する [89, Chapter 9]。したがって、

$$W \sim V$$

である。次元の関係は $[R] = L^3 T^{-1}$, $[V] = L^3$ だから、ある時間の量を τ とすると、

180 第7章 動植物の大きさの法則

$$R \sim V\tau^{-1}$$

となる．これより，

$$E_s \sim R \sim V\tau^{-1} \sim W\tau^{-1}$$

がわかる．よって，クレイバーの $\frac{3}{4}$ 乗則 (7.1)_{p.177} と合わせると，

体重の $\frac{1}{4}$ 乗則

$$\tau \sim W^{\frac{1}{4}} \quad (7.2)$$

を得る． τ を各動物固有の時間とみれば，それは体重の $\frac{1}{4}$ 乗に比例する．上述したように，プロディラのネズミ～ゾウ曲線において，ゾウの体重をネズミの体重の 10 万倍とすると，ゾウの時間はネズミの時間の 10 万倍の $\frac{1}{4}$ 乗，大雑把に約 20 倍である．20 という数字は，一般的なゾウの寿命 60 年，ネズミの寿命 3 年とする寿命の比の値に符合する．このように生理的時間は個別の動物に応じてスケールが異なる．すなわち，ゾウは長生き，ネズミは短命という尺度は，時間は一様であるという視点からの考えであって，各動物にとってはそれぞれの固有の時間スケールの中で天寿をまっとうしていると考えの方が自然なのかもしれない．

◎— フラクタル

ところで，クレイバーの $\frac{3}{4}$ 乗則 (7.1)_{p.177} は何らかの原理から演繹されたものではない．そこで次のように考えてみる．上でみたように $E_s \sim R$ であるが，単位時間あたりの酸素消費量 R は肺の表面積 — S としよう — に比例するから，

$$E_s \sim S$$

7.2 ロバート・フックのアナグラムと棒のたわみ 181

とする．一方， $a > 0$ として，

$$E_s \sim W^a$$

と仮定すると，肺の体積 V と W は比例することから，

$$S \sim V^a$$

がわかる．水風船の例 0.2_(p.3) と同様に， $[S] = L^2$ ， $[V] = L^3$ から $a = \frac{2}{3}$ と算出するのは素朴な通常の考え方であり，これが表面積の法則であった．ところがフラクタルという考え方をを用いると，凹凸がはげしい統計的に自己相似な曲面は 2 次元よりも大きい非整数次元をとる．例えば，ヒトの肺の表面積のフラクタル次元は 2.17 という [63]．そこで $[S] = L^{2.17}$ ， $[V] = L^3$ とすると $a = 0.72$ となる．仮に $[S] = L^{2.25}$ ならば $a = 0.75$ を得る．このように考えれば数字上のつじつまが合う．前掲の論文 [60] を参照されたい．そこでは，類似の考え方で植物についてのフラクタル的な成長に関する報告もなされている．また，論文 [28] も参考になるだろう．

以上は酸素消費量と肺の体積や表面積に着目した考え方であるが，マクマホンは動物を弾性体とみなして近似する構造的なアプローチによって，クレイバーの $\frac{3}{4}$ 乗則を合理的に説明できると考えた．マクマホンの考えを理解するために，円柱の棒のような弾性体のたわみについて知っておく必要がある．少し歴史も交えながら説明するが，弾性体のフックの法則を知っている読者は次節を飛ばしても構わない．

7.2 ロバート・フックのアナグラムと棒のたわみ

一般に，棒に力を加えるとたわむ．フックの法則を仮定して (正

182 第7章 動植物の大きさの法則

確には、フックの法則が成り立つ範囲で), 棒のたわみの具合を計算しよう.

まず, **フックの法則**とは次のようなものである. 図 7.2 のような自然長 l のばねを力 F で引っ張ったときの変位を Δl としたとき, F は Δl に比例する.

$$F = k\Delta l \quad (7.3)$$

ここで, 比例定数 k はばね定数と呼ばれ, その次元は, $[F] = \text{MLT}^{-2}$, $[\Delta l] = \text{L}$ より, $[k] = \text{MT}^{-2}$ である.

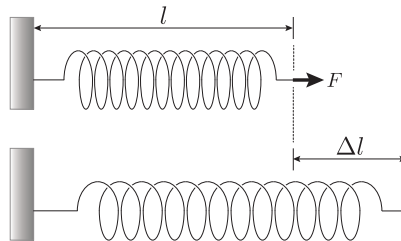


図 7.2 自然長 l のばねを力 F で引っ張ったときの変位 Δl

◎— アナグラム

フックの法則が初めて世に知られたのは, ロバート・フック³⁾の著書『太陽観察望遠鏡 (Description of Helioscopes)』(1676)のあとがき (postscript) においてである. 図 7.3 はあとがきにあるいくつかの項目のうち項目 3 を抜粋したものである.

しかし, そこには「弾性またはばねの真の理論」についてのメモ書きのような形で,

ceiiinosssttuu

³⁾ Robert Hooke, 1635.7.18–1703.3.3. 17 世紀のイングランドの科学者. 数学, 光学, 機械工学, 建築, 天文学などの多くの異なる分野に功績を残している.

7.2 ロバート・フックのアナグラムと棒のたわみ 183

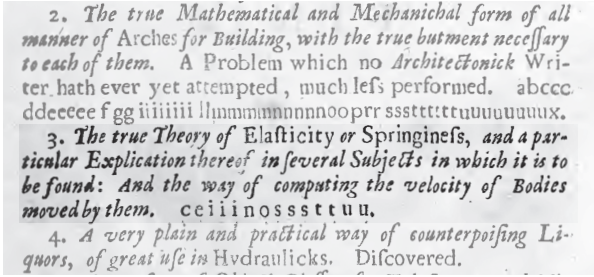


図 7.3 フックの法則 (7.3) の記述 (項目 3)

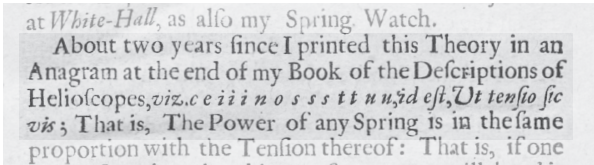


図 7.4 アナグラムの答え

と書いてある。これはラテン語のアナグラムであり意味不明である。フックは2年後の著作『Lectures de potentia restitutiva, or, Of spring explaining the power of springing bodies』(1678)において、最初の1ページ目に図 7.4 のように記述している。

そこで、2年前の著書『太陽観察望遠鏡』の最後のアナグラムで「ceiinosssttuu」と書いたが、それは

ut tensio, sic vis

であると述べている。英語では「as extension, so is force」、あるいはもう少し意識して「the extension is proportional to the force」となる。さらに「バネの反発力はバネの変位に比例する」と意識すると、フックの法則 (7.3) が現れる。フックはばねや弾性体のような固体のみならず、空気のような流体に対してもフックの法則が成り立つと主張していたようで興味深い [72]。

184 第7章 動植物の大きさの法則

ところで、図 7.3 の項目 2 には、しなやかなケーブルを、その形のまま反転すればアーチとして成立する、という建築における「アーチの法則」のアナグラムが書いてある。こちらは、フックの死後 1705 年に遺言執行者から訳が提示された。(拙著 [113] の第 6 章に関連した実験も含めて紹介したので興味ある読者は一読されたい。)

◎— 力のモーメントの次元解析

話をフックの法則 (7.3) に戻そう。弾性棒についてもフックの法則が成り立つ。

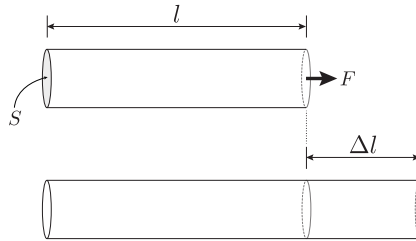


図 7.5 断面積 S 、自然長 l の弾性棒を力 F で引っ張ったときの変位 Δl

図 7.5 のような断面積 S 、自然長 l の弾性棒を力 F で引っ張ったときの変位を Δl としたとき、 F を断面積 S で割った応力 σ は、**相対変位** $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$ に比例する。

$$\sigma = E\varepsilon \quad (7.4)$$

ここで、相対変位 ε は**ひずみ**、比例定数 E は**ヤング率**と呼ばれ、その次元は、 $[\sigma] = \frac{[F]}{[S]} = \text{ML}^{-1}\text{T}^{-2}$ 、 $[\varepsilon] = 1$ より、

$$[E] = \frac{[F]}{[\varepsilon][S]} = \text{ML}^{-1}\text{T}^{-2} \quad (7.5)$$

7.2 ロバート・フックのアナグラムと棒のたわみ 185

である。

断面が半径 a の円、自然長 l 、ヤング率 E の円柱弾性棒を図 7.6 のように、力 F を加えてたわませたときの力のモーメント N を次元解析で求めよう。

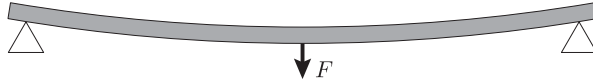


図 7.6 弾性棒に力 F を加えてたわませる

極端な図であるが、図 7.7 のように円柱弾性棒は円弧状にたわんだとし、 Γ を円柱の中心線としたとき、その円弧 Γ の半径を R 、たわみ角度を $\Delta\theta$ とする。

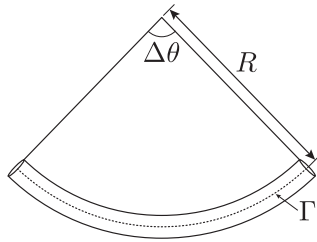


図 7.7 円弧状にたわんだ弾性棒 (Γ は円柱の中心線)

円弧 Γ の外側は自然長 l よりも伸び、内側は縮み、 Γ はちょうど伸びも縮みもしない線である。よって、

$$l = R\Delta\theta$$

である。また、断面は半径 a の円であるから、最大の伸び Δl は、

$$l + \Delta l = (R + a)\Delta\theta$$

より、 $\Delta l = a\Delta\theta$ である。

186 第7章 動植物の大きさの法則

図 7.7 は極端な図であって、見た目にはほとんどたわまない場合 $R \gg l$ である．よって、 l と R は共に長さの次元であるが、独立であるとみなして、

$$[l] \neq [R]$$

とする．このとき、 $[\Delta\theta] \neq 1$ ，すなわち、たわみ角は有次元量となる．これより、

$$[\Delta l] = [a][\Delta\theta] \neq [a]$$

がわかる．また、 $[l] = [\Delta l]$ 、 $[R] = [a]$ であるから、 $[l] \neq [a]$ となる．新しい各次元を、

$$L_a = [a], \quad L_l = [l], \quad F = [F], \quad A = [\Delta\theta]$$

とおくと、ヤング率 E の次元は、 $(7.5)_{p.184}$ の最右辺のようにはならず、 $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$ 、 $S = \pi a^2$ より、

$$[E] = \frac{[F]}{[\varepsilon][S]} = \frac{[F][l]}{[\Delta l][a]^2} = \frac{[F][l]}{[a]^3[\Delta\theta]} = \frac{FL_l}{L_a^3 A}$$

となる．

力のモーメント N が関係式 $N = f(a, l, E, R)$ で定まるとしたとき、関数 f を次元解析で求めよう．表 7.1 は各量の次元である．

量	記号	次元
断面の半径	a	L_a
自然長	l	L_l
ヤング率	E	$L_a^{-3} L_l F A^{-1}$
たわみ円弧の半径	R	$L_l A^{-1}$
力のモーメント	N	$L_a F$

表 7.1

7.2 ロバート・フックのアナグラムと棒のたわみ 187

これより、次元行列を構成し、それに行の基本変形を施すと、以下のようになる。

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & l & E & R & N \\ \hline L_a & \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right) \\ L_l & \\ F & \\ A & \end{array} \\ \xrightarrow{\text{行の基本変形}} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & l & E & R & N \\ \hline & \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \end{array} \end{array}$$

よって、無次元量

$$\Pi = \frac{NR}{a^4 E}$$

を得る。すなわち、無次元定数 C を用いて、

$$N = C \frac{a^4 E}{R}$$

がわかる。

理論的には $C = \frac{\pi}{4}$ となる。それを示そう。

◎ — $C = \frac{\pi}{4}$ の導出

図 7.8 は図 7.7_(p.185) を拡大して内部の様子を書いたものである。

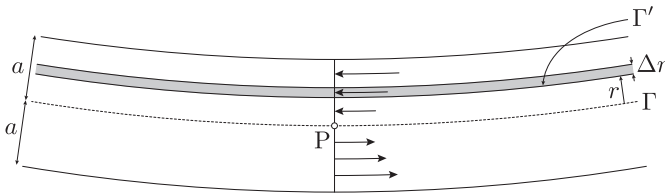


図 7.8 図 7.7_(p.185) の拡大図

188 第7章 動植物の大きさの法則

点 P は中心線 Γ を通り、中心線 Γ より外側は伸び、内側は縮む。
 図 7.8 の円弧 Γ' は、中心線の半径 R の円弧 Γ から r だけ内側に入った曲線であるから、 Γ' の長さを l' とすると、 $l' = (R - r)\Delta\theta$ である。よって、縮んだ長さは、 $\Delta\theta = \frac{l}{R}$ より、

$$\Delta l = l - l' = r\Delta\theta = \frac{rl}{R}$$

となるので、ひずみ $\varepsilon = \frac{r}{R}$ がわかる。よって、このときの応力は

$$\sigma = \frac{rE}{R}$$

である。

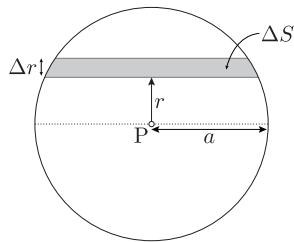


図 7.9 図 7.7_(p.185), 図 7.8 の断面図

図 7.9 は断面図で、灰色部分は、図 7.8 の曲線 Γ' から微小厚さ Δr だけ動かした灰色部分に対応した断面である。

よって、灰色部分の微小面積 ΔS は、

$$\Delta S = 2\sqrt{a^2 - r^2} \Delta r$$

となる。これより、

$$N = \int_S \sigma r dS = \int_{-a}^a \frac{rE}{R} \cdot r \cdot 2\sqrt{a^2 - r^2} dr = \frac{EI}{R}$$

7.3 ガリレオの骨とマクマホンの弾性相似モデル 189

$$I = 2 \int_{-a}^a r^2 \sqrt{a^2 - r^2} dr = 4 \int_0^a r^2 \sqrt{a^2 - r^2} dr = \frac{\pi}{4} a^4$$

から、点 P のまわりの力のモーメント

$$N = \frac{\pi a^4 E}{4R} \quad (7.6)$$

を得る. (I は断面 2 次モーメントと呼ばれる.)

7.3 ガリレオの骨とマクマホンの弾性相似モデル

図 0.5_(p.8) において、ゾウの体を円柱に見立てた近似モデルを紹介した. 1973 年にマクマホンは動物を弾性体とみなして近似して、クレイバーの $\frac{3}{4}$ 乗則を説明した [69]. その説明のために、円柱弾性棒にかかる荷重が自重の場合の関係式を導こう.

断面が半径 a の円、自然長 l 、ヤング率 E の円柱弾性棒が図 7.10 のように自重によりたわみ、重心のずれ (黒丸●から白丸○) が d であったとする.

$\Delta\theta$ が小さいとき、図 7.11 のような直角三角形を考えると、左の斜辺の長さは $\frac{l}{2}$ と近似できるので、第 0.4 節_(p.17) のピタゴラスの定理を使って、

$$\left(\frac{l}{2}\right)^2 - d^2 = R^2 - (R - d)^2$$

から、

$$d = \frac{l^2}{8R}$$

を得る.

円柱弾性棒の密度を ρ 、重力加速度を g とすると、自重による力のモーメントは、

190 第7章 動植物の大きさの法則

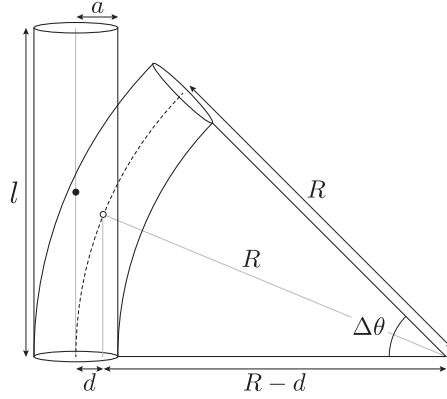


図 7.10 自重によりたわんだ弾性棒

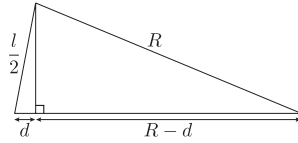


図 7.11 直角三角形近似

$$N = \pi a^2 l \rho g d = \frac{\pi a^2 l^3 \rho g}{8R}$$

となる．これが (7.6) と釣り合うから，

$$\frac{\pi a^4 E}{4R} = \frac{\pi a^2 l^3 \rho g}{8R}$$

より，

$$a^2 = cl^3, \quad c = \frac{\rho g}{2E} \quad (7.7)$$

を得る． c は無次元量ではなく長さの逆数の次元をもつが，弾性棒の特徴である密度とヤング率，および重力加速度からのみ決まり，曲がり方を特徴付ける R には依存しない定数である．よっ

7.3 ガリレオの骨とマクマホンの弾性相似モデル 191

て、同じ弾性の特徴を持ったまま棒を幾何学的に相似拡大することはできない。半径の2乗と長さの3乗の比が一定でなければならないからである。

◎— ガリレオの骨 (図 4.1_(p.105))

このことから、図 7.12 (下) のように、例えば小さな円柱の長さを3倍にしたら、直径を $\sqrt{27} \approx 5.2$ 倍にしなければならない。

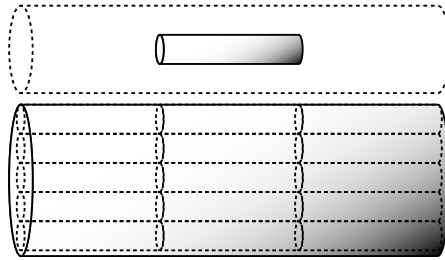


図 7.12 (上) 破線は3倍に相似拡大した円柱, (下) 長さを3倍, 直径を5.2倍にした円柱

ガリレオ・ガリレイはこの事実を知っていたはずである。実際、第4章の図 4.1_(p.105) において、上段の小動物の骨の長さを3倍にしたときの、骨の性質 (密度と弾性) を保ったままにする下段の巨大な骨の大きさは、ほぼ図 7.12 の比率と同じである。

◎— マクマホンの弾性相似モデル

準備が整ったので、マクマホンによるクレイバーの $\frac{3}{4}$ 乗則を紹介しよう [69]。改めて図 0.5_(p.8) のように、動物を円柱の弾性棒の組み合わせとみなすとして、一つの円柱の弾性棒の半径を a 、長さを l 、密度を ρ 、ヤング率を E とする。その円柱棒の重さ (体重) を W とすると、 $W = \pi \rho a^2 l$ であるから、(7.7)_{p.190} より、

192 第7章 動植物の大きさの法則

$$W \sim a^2 l \sim a^{\frac{8}{3}} \Leftrightarrow a \sim W^{\frac{3}{8}} \quad (7.8)$$

がわかる．一方，ヒル [57] によれば，筋肉は，使用する繊維の数を調整することで，負荷が変化しても同じ速度で短縮することができ，また，それぞれの筋肉は，重要な速度範囲で最大のパワーと効率を発揮するように設計されているので，筋肉の出す応力を σ ，筋肉の収縮の速さを v とすると，それぞれほぼ一定値としてよい．よって，円柱の断面積を S とすると，筋肉による単位時間当たりの仕事は $\sigma S v$ となり，これは S に比例する．この仕事が標準代謝量 E_s に比例するとすると，

$$E_s \sim S \sim a^2 \sim (W^{\frac{3}{8}})^2 = W^{\frac{3}{4}}$$

となって，クレイバーの $\frac{3}{4}$ 乗則 (7.1)_{p.177} を得る．

同様の考えで，動物固有の時間についての体重の $\frac{1}{4}$ 乗則 (7.2)_{p.180} を導出しよう．まず，動物固有の時間 τ だけ筋肉が速度 v で距離 d だけ収縮したとすると，上述したように v は一定で， d は動物のサイズ l に比例するから，

$$\tau \sim \frac{d}{v} \sim \frac{l}{v} \sim l$$

がわかる．一方，(7.7)_{p.190} と (7.8) から， $W \sim l^4$ なので， $W \sim \tau^4$ ，すなわち体重の $\frac{1}{4}$ 乗則 (7.2)_{p.180} を得る．

◎— ノミが人間の大きさだったら・・・

体長 1 mm のノミは 10 cm 飛び上がる．すなわち，ノミは体長の 100 倍もジャンプ出来るのだから，もしノミが人間の大きさだったら，超高層ビルの高さ並の大ジャンプをするに違いない，というように言われることがある．本当だろうか．

7.3 ガリレオの骨とマクマホンの弾性相似モデル 193

体長 l 、質量 m の動物が高さ h ジャンプするでしょう。ジャンプするために応力 σ の筋肉が距離 d だけ収縮したとすると、筋肉の断面積を S として、なした仕事は、

$$mgh \sim \sigma Sd$$

である。 $d \sim l$ で、 $m \sim \rho Sl$ であるから、

$$h \sim \frac{\sigma}{\rho g}$$

となり、筋肉の応力に比例して、密度や重力加速度に反比例してジャンプする高さは決まる。右辺は体長 l に無関係に一定であるから、 h は l に比例せずに一定値をとる。つまり、単純にノミが人間の大きさになっても、変わらず 10 cm 飛び上がるだけである。

◎— どこまでも高い木がないのはなぜか

童話「ジャックと豆の木」の天まで届く豆の木の上の方まで登ってみたい、と誰もが一度は思ったことであろう⁴⁾。木が天高く成長することは可能なのだろうか。

ヤング率 E 、密度 ρ の円柱の弾性棒の断面 (円) の半径 a と長さ l は、 $a^2 = cl^3$ という関係で結ばれていた ((7.7)_{p.190})。生木と (乾燥した) 木材のヤング率は異なるはずだが、森林・林業学習館 [58] によれば、木材は $E = 10 \text{ GPa}$ 前後なので、生木もそれに準ずると仮定し、密度は $\rho = 1 \text{ g/cm}^3$ とする。これより、比例定数 c は、

$$\begin{aligned} c &= \frac{\rho g}{2E} = \frac{1 \text{ g/cm}^3 \times 9.8 \text{ m/s}^2}{2 \times 10 \text{ GPa}} \\ &= \frac{10^3 \text{ kg/m}^3 \times 9.8 \text{ m/s}^2}{2 \times 10^{10} \text{ kg/(m s}^2)} = 4.9 \times 10^{-7} \text{ m}^{-1} \end{aligned}$$

⁴⁾ 「ジャックと豆の木」の原題は「Jack and the Beanstalk」なので、直訳すると豆の木というより豆の茎である。しかし語呂が悪い。

194 第7章 動植物の大きさの法則

となる.

直径 $2a = 20 \text{ cm}$ とすると, $l = \left(\frac{a^2}{c}\right)^{\frac{1}{3}} = 27 \text{ m}$ である. スギ

の木などはこのくらいの高さであろう. 直径 $2a = 2 \text{ m}$ とすると, $l = 127 \text{ m}$ となる. 豆の木にはほど遠いが, 木が弾性円柱棒だとすると, これ以上高いと折れ曲がる. 世界一高い木といわれるセコイア (Sequoia) の高さは $l = 115 \text{ m}$ と言われている.