

感染症流行の SIR 数列モデル

(2024 年 8 月 6 日)

大阪公立大学 大学院理学研究科 数学専攻
講義補足資料

矢崎成俊 (明治大学)

目次

第 1 章	感染症流行の SIR 数列モデル	5
§1	封鎖人口と 3 種のグループ	5
§2	離散時間と感染の割合	6
§3	回復の割合	8
§4	感染症流行の連立方程式	8
§5	最終目標	10
§6	基本再生産数の閾値としての役割	11
§7	基本再生産数の意味	13
§8	平均感染期間 $\frac{1}{\rho}$	15
§9	SIR 数列モデル	16
§10	行動制限と感染対策	20
§11	最終規模方程式	21
§12	ケルマック-マッケンドリックの SIR モデルの離散化の観点から	23
第 2 章	ポアソン分布とポアソン過程	27
§1	幾何分布と 2 項分布	27
§2	2 項分布からポアソン分布へ	29
§3	ポアソン過程	32
§4	ポアソン過程からポアソン分布へ	34
§5	指数分布	36

第 1 章

感染症流行の SIR 数列モデル

COVID-19 の流行モデルそのものではないが，コロナに限らず，インフルエンザなど現実の感染症流行を単純化した数学モデルを考える．あるいは，伝染するものであれば，ウイルスに限らず，パニック，情報の伝染，アルコール，薬物などの中毒の伝染などにも解釈次第で応用可能である．簡単な方程式だが，実情を反映する場合も多い．現実の複雑な現象を単純化するにはいくつかの思い切った仮定が必要で，この仮定の妥当性が，できあがるモデル方程式の良し悪しに影響する．

§1 封鎖人口と 3 種のグループ

インフルエンザや COVID-19 のように伝染性のウイルスの流行の数学モデルを考える．ある地域にいる人口 N の人たちのみを対象にする．その地域の外とは交流がなく，誕生も死亡もなく，人口は増減しない，すなわち N の値は一定とした封鎖人口の仮定をする．もちろん，現実の人口はつねに変動している．しかし，変動が小さく，その変動が感染状況に影響しないならば，変動しない理想的な仮定を課して作ったモデルでも感染流行の予測説明ができるのではないかと期待される．

N を互いに素な 3 つのグループに分ける．

グループ S 感染する可能性はあるが，まだ感染していない人 (感受性者)．その人数を S とする (susceptible (感受性のある) の頭文字)．

グループ I 感受性者に感染させることができる人 (感染者)．その人数を I とする (infective (感染させる) の頭文字)．

グループ R 感染したが回復して免疫を獲得し，2 度と感受性者にならない人 (回復

者),あるいは感染して入院などにより隔離された人(隔離者). その人数を R とする (recovered (回復した),あるいは removed (隔離された) の頭文字).

この3つのグループは互いに素であり,

$$S + I + R = N \quad (1.1)$$

を満たす. S, I, R は人数といったが実数の値をとるとする. 人数でなく, 例えば人口密度など, 何らかの意味でのグループのサイズ (大きさ) を考えてもよい. ただ, サイズ, サイズというのも煩わしいので, 以降, 人数とか感染者数という言い方をする.

§2 離散時間と感染の割合

各グループの人数の把握 (データの取得) は, 一定時間 $\tau > 0$ ごとになされるとして, 例えば,

$$\tau = 1 \text{ week} \quad \text{あるいは} \quad \tau = 1 \text{ day}$$

くらいを想定する. τ 時間間隔ごとの離散時刻を

$$t_n = n\tau \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

とする.

感受性者のうち感染者になる割合は S に比例すると考える. 感受性者と感染者が何らかの意味で接触して感染すると考えると, その比例係数は I と τ に依存するだろうから, その割合を $f(I, \tau)$ とすると, S のうち

$$S \times f(I, \tau)$$

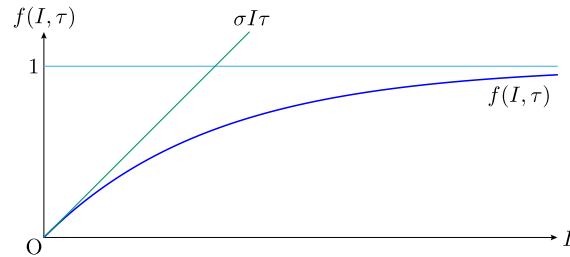
が τ 時間で感染者 I となる. $f(I, \tau)$ を感染率と呼ぶ. 感染者がいなければ, 感受性者は感染しないと考えて, $f(0, \tau) = 0$ とする.

感染者がいなくても感染が流行する場合もある. 例えば, マラリアのように蚊が感染を媒介するような接触の仕方で伝染する場合は, $f(0, \tau) = 0$ という仮定は成り立たない. ここでは, 濃厚接触のような直接的な接触だけでなく, 飛沫やドアノブを介したような間接接触も含めた接触を感染経路と接触するということにして, 感染者がいるから感受性者は感染経路と接触することにより感染すると仮定して, $f(0, \tau) = 0$ が成り立つ感染症の流行を考える.

また、感染した人は、すぐに感染させられる人になるとする。本来は感染した (infected な) 人が一瞬で誰かを感染させる能力をもつわけではなく、体内にウイルスが取り込まれて、複製を作り、体外に放出されるという過程を経る。だから感染した (infectious な) 状態の人と感染させられる状態の人は異なるが、ここでは、感染したらすぐに感染させられる人になると仮定する。したがって、感染者が少しでもいたら感染率が発生すると考えて、 $I > 0$ ならば $f(I, \tau) > 0$ とする。さらに、感染者が増えると感染率も上がるとして、 $\frac{\partial f}{\partial I}(I, \tau) \geq 0$ とするが、 I が大きくても感染率は 100% にはならないとする。すなわち、任意の $0 < I < \infty$ に対して $0 < f(I, \tau) < 1$ を仮定する。(もし $f(I, \tau) = 1$ とすると最初の τ 時間後で S は全員感染者となり、ほぼ自明な問題設定になる。)

一方、 I が N に比べて相対的に小さいうちは $f(I, \tau)$ は I に比例して増加すると考えて、 $\frac{\partial f}{\partial I}(0, \tau) = \sigma\tau > 0$ とする。また、 $\frac{f(I, \tau)}{\tau}$ は σI を超えないとする。 $\sigma > 0$ はしばしば感染伝達係数と呼ばれ、単位サイズ、単位時間あたりの感染のしやすさを表す。 σ の意味は後に明らかとなる。

下図は f の概念図である。



τ 時間で $Sf(I, \tau)$ だけ感受性者が感染者になるのだから、ある時刻で感受性者数が S 、感染者数が I だったら、 τ 時間後の感受性者数は S から $Sf(I, \tau)$ だけ減り、感染者数は I から同じ分だけ増える。

以上の f に関する仮定をまとめる。

$$0 < f(I, \tau) < \min\{\sigma I \tau, 1\} \quad (0 < I < \infty), \quad f(0, \tau) = 0 \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial I}(I, \tau) \geq 0 \quad (I > 0), \quad \frac{\partial f}{\partial I}(0, \tau) = \sigma\tau > 0 \quad (1.3)$$

§3 回復の割合

感染者はある一定の割合で必ず回復し、回復者は (免疫ができて) 感受性者に戻らず、したがって2度と感染者にならないと仮定する. その割合の単位時間あたりの比例定数を ρ とし, I のうち

$$I \times \rho\tau$$

が τ 時間で回復者となるとする. よって, ある時刻で感染者数が I , 回復者数が R だったら, τ 時間後の感染者数は I から $\rho I\tau$ だけ減り, 回復者数は R から同じ分だけ増える.

この意味で ρ を単位時間あたりの回復率と呼ぶ. ρ は 時間⁻¹ という次元をもつ. 例えば, 時間の単位が week (週) だったら, ρ は week⁻¹ という単位となる. τ の次元は時間だから, $\rho\tau$ は無次元量で τ 時間での回復率である. τ 時間の回復率を 100% にすると, τ 時間で I は全員回復者となる. この場合, 得られる情報が少なすぎるので, 各グループの人数を観測する間隔 τ をもっと短くする必要がある. 細かな感染状況の変化をみるために, 条件

$$0 < \rho\tau < 1 \tag{1.4}$$

を仮定する. 例えば, $\tau = 1 \text{ week}$, $\rho^{-1} = 2 \text{ weeks}$ ならば, $\rho\tau = 0.5$ なので, 1 週間の回復率は 50% となる. ρ^{-1} は後述するように平均感染期間という意味を持つ. よって, (1.4) は平均感染期間 ρ^{-1} よりも小さい観測間隔 τ を考えよという条件である.

§4 感染症流行の連立方程式

以上の設定をまとめて以下のように連立方程式を立てる.

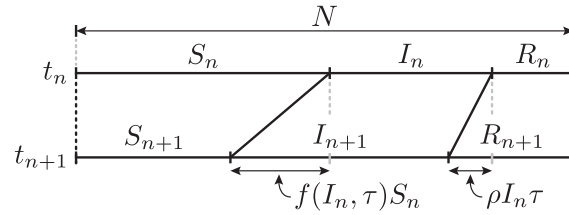
τ 時間ごとにそれぞれのグループの人数の変化があるとして, $n = 0, 1, 2, \dots$ に対して, 時刻 $t_n = n\tau$ における感受性者数, 感染者数, 回復者数をそれぞれ S_n, I_n, R_n とする. τ 時間ごとにデータが観測されるのだから, これらは時間区間 $[t_n, t_{n+1})$ の間の量といえる.

感染者が発生したときを初期時刻 $t_0 = 0$ とし, 初期値を

$$S_0 > 0, \quad I_0 > 0, \quad S_0 + I_0 = N, \quad R_0 = 0 \tag{1.5}$$

とする．例えば $I_0 = 10$ 人, $N = 1000$ 万人, $S_0 = N - I_0$ のように, 大人数の中にわずかな感染者が侵入した状況 $0 < I_0 \ll S_0$ を想定している．そして, 例えば $\tau = 1$ week としたとき, その後の $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して, S_n, I_n, R_n がどのように変化するかを追跡する．

初期条件 (1.5) と仮定 (1.2)(1.3)(1.4) のもとで, 時刻 t_n から時刻 t_{n+1} へのそれぞれのグループの人数の推移は次のような概念図に書くことができる．



これを連立方程式で書くと以下のような ($n = 0, 1, 2, \dots$).

$$S_{n+1} = S_n - S_n f(I_n, \tau) \quad (1.6)$$

$$I_{n+1} = I_n + S_n f(I_n, \tau) - \rho I_n \tau \quad (1.7)$$

$$R_{n+1} = R_n + \rho I_n \tau \quad (1.8)$$

(1.6)(1.7)(1.8) 式の辺々を足し合わせると,

$$S_{n+1} + I_{n+1} + R_{n+1} = S_n + I_n + R_n$$

となる．初期条件は,

$$S_0 + I_0 + R_0 = N$$

を満たすので, その後の時刻においても,

$$S_n + I_n + R_n = N \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (1.9)$$

が満たされる．これは総人口 N はつねに一定である封鎖人口の仮定 (1.1) に他ならない．

改めて連立方程式 (1.6)(1.7)(1.8) をみると, R_n は方程式 (1.6)(1.7) に影響を与えていないから, 方程式 (1.6)(1.7) の解だけを考えればよいことがわかる． N は一定だから, (1.9) より, S_n, I_n がわかれば,

$$R_n = N - (S_n + I_n) \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (1.10)$$

として, 回復者数がつねに求まる．したがって以降, 連立方程式 (1.6)(1.7) だけを考えることにする．

§5 最終目標

連立方程式 (1.6)(1.7), 初期条件 (1.5), および仮定 (1.2)(1.3)(1.4) から, $n = 0$ のとき,

$$S_1 = (1 - f(I_0, \tau))S_0 \in (0, S_0), \quad I_1 = f(I_0, \tau)S_0 + (1 - \rho\tau)I_0 > (1 - \rho\tau)I_0 > 0$$

がわかり, $n = 1$ のとき,

$$S_2 = (1 - f(I_1, \tau))S_1 \in (0, S_1), \quad I_2 = f(I_1, \tau)S_1 + (1 - \rho\tau)I_1 > (1 - \rho\tau)^2 I_0 > 0$$

がわかる. 以下同様に

$$S_0 > S_1 > \cdots > S_n > S_{n+1} > \cdots > 0, \quad I_n > (1 - \rho\tau)^n I_0 > 0 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

がわかる.

よって, 極限 $S_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \geq 0$ が存在する. 後にわかるように, $S_\infty > 0$ である.

一方, 極限 $I_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} I_n$ が存在し, $I_\infty = 0$ であることを示そう.

(1.6) と (1.7) を, いくつかの項を移項して, $n = k - 1, k - 2, \dots, 2, 1$ について辺々足すと,

$$\begin{aligned} S_k - S_{k-1} + I_k - I_{k-1} &= -\rho I_{k-1} \tau \\ S_{k-1} - S_{k-2} + I_{k-1} - I_{k-2} &= -\rho I_{k-2} \tau \\ &\vdots \quad \quad \quad \vdots \\ S_1 - S_0 + I_1 - I_0 &= -\rho I_0 \tau \end{aligned}$$

から,

$$S_k - S_0 + I_k - I_0 = -\rho\tau \sum_{j=0}^k I_j$$

を得る. よって,

$$J_k = \sum_{j=0}^k I_j = \frac{S_0 - S_k}{\rho\tau} + \frac{I_0 - I_k}{\rho\tau} < \frac{S_0}{\rho\tau} + \frac{I_0}{\rho\tau} = \frac{N}{\rho\tau}$$

から, 数列 $\{J_k\}$ は単調増加で上に有界だから $k \rightarrow \infty$ の極限が存在し, これより数列 $\{I_n\}$ は収束して, その極限值は $I_\infty = 0$ であることがわかる. したがって, 十分

に時間が経てば $I_n < 1$ となり、その後感染者不在となることが期待される。その意味で、本数学モデル (1.6)(1.7)(1.8) は、いつか感染症流行が終息するモデルになっている。

そこで本モデルに対する最終目標として次の 2 つを掲げる。

- (I) **流行の有無** 感染症のない状態に感染者が少数侵入したとき、感染症が流行するか否かを決定すること。
- (II) **流行の結末** 感染症流行が進行して十分に時間が経ったときの感染者の割合、つまり最終的な感染状態の規模 (最終規模) を知ること。感受性者数 S_n の $n \rightarrow \infty$ のとき (十分に時間が経ったとき) の極限值 S_∞ との差 $S_0 - S_\infty$ が最終的に感染者となった数であり、初期の感受性者数 S_0 との相対的な比の値 $\frac{S_0 - S_\infty}{S_0}$ が感染者の最終規模である。もし、 $S_\infty = 0$ であったら、最終規模は 100% となって全員感染したことになる。

未解決問題

(II) に関連して、ある時刻 t_n 以降ずっと $I_n < 1$ となる n を精度良く見積もることができれば、流行の終息を予想できることになり非常に有効であるが、現時点ではこれは未解決問題であろう。

§6 基本再生産数の閾値としての役割

もし初期値が $0 < I_0 \ll S_0$ であった場合、しばらくは $S_n \approx S_0$ であろう。また、仮定 (1.2)(1.3) から、 I_n が N に比べて相対的に小さいとき、

$$f(I_n, \tau) = f(0, \tau) + \frac{\partial f}{\partial I}(0, \tau)I_n + o(I_n) = \sigma I_n \tau + o(I_n)$$

と展開できる。そこで (1.7) において、 $S_n \approx S_0$ として、上の展開式を代入すると、

$$I_{n+1} \approx I_n + \sigma S_0 I_n \tau - \rho I_n \tau + o(I_n) = \left(1 + \left(\frac{\sigma S_0}{\rho} - 1\right) \rho \tau\right) I_n + o(I_n) \quad (1.11)$$

となる。ここで、

$$\mathcal{R}_0 = \frac{\sigma S_0}{\rho}$$

として, $r = 1 + (\mathcal{R}_0 - 1)\rho\tau$ とおくと, 番号を一つずらして,

$$I_n \approx rI_{n-1} + o(I_{n-1}) \approx r^2I_{n-2} + o(I_{n-2}) \approx \cdots \approx r^n I_0 + o(I_0)$$

となる. このとき, 以下のように $\mathcal{R}_0$ の値が流行の閾値の役割を果たす.

- $\mathcal{R}_0 > 1$ ならば $r > 1$ で, I_n は I_0 のおよそ r^n 倍のオーダーで感染者数は増加し, 大規模な流行 (パンデミック) が予感される.
- $\mathcal{R}_0 < 1$ ならば $0 < r < 1$ で, I_n は I_0 のおよそ r^n 倍のオーダーで感染者数は減少し, 自然消滅 (流行の終息) が期待される.

この閾値 $\mathcal{R}_0$ を**基本再生産数** (basic reproduction number) と呼ぶ. 記号は R_0 とかくと回復者の初期値のサイズと混同してしまうので, 花文字の $\mathcal{R}_0$ を用いる.

以上が基本再生産数 $\mathcal{R}_0$ の閾値としての直観的な役割である.

例 (1.6)において, $S_n \approx S_0$ として, 上の f の展開式を代入すると,

$$S_{n+1} \approx S_n - \sigma S_0 I_n \tau + o(I_n)$$

となる. 番号を一つずらして, 上の I_n の近似式を代入すると,

$$\begin{aligned} S_n &\approx S_{n-1} - \sigma S_0 I_{n-1} \tau + o(I_{n-1}) \approx S_{n-2} - \sigma S_0 (I_{n-1} + I_{n-2}) \tau + o(I_{n-2}) \\ &\approx \cdots \approx S_0 - \sigma S_0 \sum_{j=0}^{n-1} I_j \tau + o(I_0) \\ &\approx S_0 - \sigma S_0 \sum_{j=0}^{n-1} r^j I_0 \tau + o(I_0) = S_0 - \sigma S_0 \frac{r^n - 1}{r - 1} I_0 \tau + o(I_0) \\ &= S_0 - \mathcal{R}_0 \frac{r^n - 1}{\mathcal{R}_0 - 1} I_0 + o(I_0) \end{aligned}$$

を得る. 初期値を

$$N = 1000 \text{ 万人}, \quad I_0 = 10 \text{ 人}, \quad S_0 = N - I_0$$

とし, $\mathcal{R}_0 = 3$, $\rho\tau = 0.5$ とした場合を考えてみる. このとき $r = 2$ となって, 時刻 t_n における感染者数と感受性者数はそれぞれ $I_n \approx 10 \cdot 2^n$ と $S_n \approx S_0 - 15(2^n - 1)$ で, 時刻 t_n までの累計新規感染者数は $I_1 + \cdots + I_n \approx 10(2^{n+1} - 2)$ となることがわかる. 例えば $\tau = 1 \text{ week}$, $n = 12$ とすると, t_{12} は 3 ヶ月である. 3 ヶ月後の感染者数 I_{12} は約 4 万人で, 3 ヶ月間の累積感染者数は約 8 万人になるので, 10 人の感染

者数が3ヶ月の延べ数で8000倍に増えたことになるから、感染症が大規模に流行しているといつてよい。

3ヶ月後の感受性者数 S_{12} の S_0 に対する相対比は $\frac{S_{12}}{S_0} \doteq 99.4\%$ である。それ以降の相対比 $\frac{S_n}{S_0}$ は、 $n = 13$ で 98.8% 、 $n = 14$ で 97.5% 、 $n = 15$ で 95.1% と続く。一方、3ヶ月後の感染者数 I_{12} の N に対する相対比は $\frac{I_{12}}{N} \doteq 0.4\%$ である。それ以降の相対比 $\frac{I_n}{N}$ は、 $n = 13$ で 0.8% 、 $n = 14$ で 1.6% 、 $n = 15$ で 3.3% と続く。よって、 $S_n \approx S_0$ と仮定し、 f を展開して $o(I_n)$ を無視できるのは、せいぜい $n = 13$ くらいまでで、 $n = 12$ までならば許容範囲であろう。

§7 基本再生産数の意味

基本再生産数 $\mathcal{R}_0 = \frac{\sigma S_0}{\rho}$ の次元を改めて考えると、

$$\frac{[\text{サイズ}^{-1} \text{時間}^{-1}] [\text{サイズ}]}{[\text{時間}^{-1}]} = [-]$$

という無次元量であることがわかる。したがって、時間やサイズの単位に依存しない流行の閾値となっている。

一方、 $\frac{\sigma S_0}{\rho}$ の各項の意味はにわかには理解できない。そこで、感染症疫学における基本再生産数の定義に立ち戻って考える。

基本再生産数 感受性者のみの集団に侵入した感染者が、感染させる能力を失うまでに1人あたりが再生産する2次感染者サイズの期待値の上限。

この定義から基本再生産数 $\mathcal{R}_0$ が $\frac{\sigma S_0}{\rho}$ となることを導いてみよう。

まず、(1.6)において $I_0 = 0$ とすると、 $S_n \equiv S_0$ である。 $I_0 > 0$ は初期感染者の存在、すなわち感受性者のみの集団 S_0 に感染者集団 I_0 が侵入することを意味する。この I_0 に該当する者を1次感染者と呼ぶ。時刻 t_n における感染者数 I_n は、1次感染者と1次感染者から感染した2次以降の感染者の合計である。1次感染者は、感受性者に感染させるだけで、感染に感染を重ねることを考えないので、回復率 ρ に従って回復する。

その回復の具合を方程式から導くために、時刻 t_n の1次感染者数を $I_n^{(1)}$ とする。上付き添え字の (1) は1次の意味である。 $I_n^{(1)}$ はこれ以上感染しない感染者だから、

(1.7) の右辺第 2 項がない次の方程式を満たす.

$$I_{n+1}^{(1)} = I_n^{(1)} - \rho I_n^{(1)} \tau$$

初期値は $I_0^{(1)} = I_0$ である. この方程式の解は,

$$I_n^{(1)} = r^n I_0, \quad r = 1 - \rho \tau \quad (1.12)$$

である. 条件 (1.4) から r は $0 < r < 1$ を満たすので,

$$I_n^{(1)} = r^n I_0 \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \quad (1.13)$$

を得る. つねに $I_n^{(1)} > 0$ であるから, 1 次感染者は有限の n で感染させる能力を失うことはない.

次に $I_n^{(1)}$ の 1 次感染者が感染させる時刻 t_n までの 2 次感染者数を $I_n^{(2)}$ とする. 上付き添え字の (2) は 2 次の意味である. 感受性者数がつねに S_0 の集団において $I_n^{(2)}$ は, 次の方程式を満たす.

$$I_{n+1}^{(2)} = I_n^{(2)} + \sigma S_0 I_n^{(1)} \tau \quad (1.14)$$

初期値は $I_0^{(2)} = 0$ である.

ここで, 1 次感染者が感染させる 2 次感染者数の最大限の動向をみるため, 2 次感染者の回復は考えていない. また, (1.14) の右辺の第 2 項は, 本来は $f(I_n^{(1)}, \tau) S_n$ であるが, I_0 が十分に小さいとすると, (1.2) から $f(I_0, \tau) \leq \sigma I_0 \tau$ であり, (1.12) から $I_n^{(1)} \leq I_0$ なので, $f(I_n^{(1)}, \tau) \leq \sigma I_n^{(1)} \tau$ である. また, $S_n \leq S_0$ であるから, $f(I_n^{(1)}, \tau) S_n$ の上限として (1.14) の右辺の第 2 項を考える.

(1.14) に (1.12) を代入すると,

$$I_{n+1}^{(2)} = I_n^{(2)} + \sigma S_0 I_0 r^n \tau$$

となる. よって, 番号を一つずらして,

$$\begin{aligned} I_n^{(2)} &= I_{n-1}^{(2)} + \sigma S_0 I_0 r^{n-1} \tau = I_{n-2}^{(2)} + \sigma S_0 I_0 (r^{n-2} + r^{n-1}) \tau \\ &= \cdots = I_1^{(2)} + \sigma S_0 I_0 (r + r^2 + \cdots + r^{n-2} + r^{n-1}) \tau \\ &= \sigma S_0 I_0 (1 + r + \cdots + r^{n-1}) \tau \end{aligned} \quad (1.15)$$

$$= \sigma S_0 I_0 \frac{r^n - 1}{r - 1} \tau = \sigma S_0 I_0 \frac{1 - r^n}{\rho} \quad (1.16)$$

最後の等号は, 分母の r に $r = 1 - \rho \tau$ を代入し, τ を約分して求めた変形である.

(1.13) でみたように, 1 次感染者は $n \rightarrow \infty$ で感染させる能力を失う. この間に 1 次感染者が再生産する 2 次感染者数は, いわば時刻 t_∞ までのサイズであるから $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n^{(2)}$ となる. (1.14) において,

この極限値の初期 1 次感染者数 I_0 に対する相対比の値が, 基本再生産数 $\mathcal{R}_0$ の定義でいう所望の期待値の上限である.

よって, (1.16) から,

$$\mathcal{R}_0 = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} I_n^{(2)}}{I_0} = \frac{\sigma S_0}{\rho} \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - r^n) = \frac{\sigma S_0}{\rho}$$

を得る.

$\frac{\sigma S_0}{\rho}$ の分母分子の役割を明快にするために, 基本再生産数を $\mathcal{R}_0 = \sigma S_0 \times \frac{1}{\rho}$ と分解して考えてみよう.

§8 平均感染期間 $\frac{1}{\rho}$

σ は感染者から感受性者への感染のしやすさを表すパラメータ (感染伝達係数) で, [サイズ⁻¹ 時間⁻¹] という次元をもっている. だから, σS_0 の次元は [時間⁻¹] である. これに 1 次感染者数 I_0 をかけたものが 2 次感染者数となるのだから, σS_0 は単位時間あたり再生産される 2 次感染者の感染率とみなせる. また, ρ は単位時間あたりの回復率だから, ρ の次元は [時間⁻¹] である. よって, ρ^{-1} の次元は [時間] となるが, 何の時間なのかを考えてみよう.

(1.15) の右辺の $\sigma S_0 I_0$ に掛かっている量だけを取り出して,

$$T_n = (1 + r + \cdots + r^k + \cdots + r^{n-1})\tau$$

とおく. もともと (1.12) から, $r^k = \frac{I_k^{(1)}}{I_0}$ であったので,

$$T_n = \left(1 + \frac{I_1^{(1)}}{I_0} + \cdots + \frac{I_k^{(1)}}{I_0} + \cdots + \frac{I_{n-1}^{(1)}}{I_0} \right) \tau$$

とかける. ここで, $\frac{I_k^{(1)}}{I_0}$ は初期感染者が時刻 t_k も感染者である確率だから, $T_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{I_k^{(1)}}{I_0} \tau$ は, 時刻 $t_0 = 0$ から時刻 t_n までの $n\tau$ 時間の感染期間の期待値になってい

る．よって，(1.16) の右辺で導出した $T_n = \frac{1-r^n}{\rho}$ から， $n \rightarrow \infty$ の T_n の極限値が

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \frac{1}{\rho}$$

と求まる．この極限値は $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n$ の意味から，感染者が感染させる能力を失うまでの期待時間，言い換えると平均感染期間と見なすことができる．つまり $\frac{1}{\rho}$ は平均感染期間を意味する．例えば，回復率 ρ が小さい (0 に近い) と，なかなか回復せず，平均感染期間 $\frac{1}{\rho}$ はその分長くなることになるが，これは直観に違わない．

以上より，基本再生産数を $\mathcal{R}_0 = \sigma S_0 \times \frac{1}{\rho}$ と分解してみると，

基本再生産数とは，感受性者数 S_0 の集団に侵入した 1 人の感染者が単位時間あたりに再生産する 2 次感染者の感染率 σS_0 に平均感染期間 $\frac{1}{\rho}$ を乗じた数

といった解釈が可能であることがわかる．

§9 SIR 数列モデル

本節では，感染率 $f(I, \tau)$ と感染伝達係数 σ を詳しく定めて，感染症流行の数列モデルを導出する．

大前提として，感受性者は病原体と接触すると感染する可能性が出てくる．したがって，感受性者が感染者と濃厚接触した直接接触のときだけでなく，COVID-19 やノロウイルスなど，感染者に直接接触しなくても汚染物が残存している物体への間接接触によって高い感染性を持つことがある．こうした直接的，あるいは間接的な感染経路と τ 時間に延べ j 回接触する確率を $P(j, \tau)$ とする．

また，感染経路との接触 1 回で感染する可能性が出てくる確率を I の関数として $\phi = \Phi(I)$ とする．例えば，病原体と接触しうる機会が，家庭内で共用のタオルに接触する機会や飛沫と接触する機会であった場合，タオルに病原体が付着している確率や飛沫が病原体を含む確率が ϕ である．感染者がいないと感染経路に病原体は存在しないから $\Phi(0) = 0$ を仮定し， ϕ は感染者数と正の相関を持つと考えて $\Phi'(0) > 0$ とする．これより，感染経路と j 回接触し，その内 l 回が感染の可能性を持つ接触となる確率を $g(l)$ とすると，

$$g(l) = {}_j C_l \phi^l (1 - \phi)^{j-l} \quad (l = 0, 1, \dots, j) \quad (1.17)$$

である．(1.17) は感染の可能性を持つ接触回数を確率変数とした確率分布である．2 項定理から $\sum_{l=0}^j g(l) = 1$ となる．これは全事象 $\{0, 1, \dots, j\}$ の確率が 1 であることを意味している．

感染可能性のある感染経路との接触 1 回で感染する確率を β とすると， $(1 - \beta)^l$ は l 回の接触で感染を免れる確率である．したがって， j 回の接触で感染を免れる確率は，

$$\sum_{l=0}^j (1 - \beta)^l g(l) = ((1 - \beta)\phi + (1 - \phi))^j = (1 - \beta\phi)^j$$

となる．

よって，感染経路と τ 時間に j 回接触して感染を免れる確率は $(1 - \beta\phi)^j P(j, \tau)$ なので， $\phi = \Phi(I)$ より， τ 時間に感染を免れる確率を $Q(I, \tau)$ とすると，

$$Q(I, \tau) = \sum_{j=0}^{\infty} (1 - \beta\Phi(I))^j P(j, \tau)$$

となる．ゆえに， τ 時間の感染率 $f(I, \tau)$ は，

$$f(I, \tau) = 1 - Q(I, \tau)$$

である．

感染経路との接触 1 回で感染可能性となる確率の関数

$$\Phi : [0, N] \ni I \mapsto \phi \in [0, 1]$$

を $\Phi(0) = 0$ と $\Phi'(0) > 0$ を満たし，かつ無次元量となる次の関数で与える．

$$\text{仮定} \quad \Phi(I) = \alpha \frac{I}{N} \quad (0 < \alpha \leq 1)$$

α は手指消毒やマスクなどが効果を発揮すれば，そのような感染対策で値を小さくできるパラメータである．

最後に，感染経路と τ 時間に延べ j 回接触する確率 $P(j, \tau)$ をポアソン分布で与える．

$$\text{仮定} \quad P(j, \tau) = \frac{(\gamma\tau)^j e^{-\gamma\tau}}{j!}$$

ポアソン分布は, $[t, t + \tau)$ 時間内にちょうど 1 回生起する確率を $\gamma\tau + o(\tau)$ としたポアソン過程から導出される. ポアソン分布から, τ 時間内の事象の生起回数の期待値が

$$\sum_{j=0}^{\infty} jP(j, \tau) = \gamma\tau$$

となることがわかる. よって, γ は単位時間あたりに感染経路と接触する回数の期待値 (平均値) である.

以上より,

$$Q(I, \tau) = \sum_{j=0}^{\infty} \left(1 - \frac{\beta\alpha I}{N}\right)^j \frac{(\gamma\tau)^j e^{-\gamma\tau}}{j!} = \exp\left(-\frac{\beta\alpha\gamma}{N} I\tau\right)$$

を得る.

これより, $f(I, \tau) = 1 - Q(I, \tau)$ から,

$$\frac{\partial f}{\partial I}(0, \tau) = -\frac{\partial Q}{\partial I}(0, \tau) = \frac{\beta\alpha\gamma}{N} \tau$$

となって, 感染伝達係数 σ が

$$\sigma = \frac{\beta\alpha\gamma}{N}$$

のように与えられる.

以上のように得られた感染率 $f(I, \tau)$ を連立方程式 (1.6)(1.7)(1.8) に代入して次を得る.

$$S_{n+1} = S_n e^{-\sigma I_n \tau} \quad (1.18)$$

$$I_{n+1} = S_n (1 - e^{-\sigma I_n \tau}) + (1 - \rho\tau) I_n \quad (1.19)$$

$$R_{n+1} = R_n + \rho I_n \tau \quad (1.20)$$

ここで, $\sigma = \frac{\beta\alpha\gamma}{N}$ で, 初期条件は (1.5) と同じく,

$$S_0 = N - I_0, \quad 0 < I_0 < N, \quad R_0 = 0$$

とする. 典型的な初期条件は, わずかな感染者がいるという仮定を課して,

$$S_0 = N - I_0, \quad 0 < I_0 \ll N, \quad R_0 = 0 \quad (1.21)$$

である.

この連立方程式を **SIR 数列モデル** と呼ぶ.

数値例 初期値を $N = 1000$ 万, $I_0 = 10$, $S_0 = N - I_0$, $R_0 = 0$ とし, パラメータを

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau = 1 \text{ week} : \text{データ取得の間隔は 1 週間} \\ \rho = 0.5 \text{ week}^{-1} : \text{平均感染期間は 2 週間} \\ \beta = 0.02 : \text{感染可能性のある感染経路との接触 1 回で感染する確率は 2\%} \\ \alpha = 0.6 : \text{感染経路との接触 1 回で感染可能性となる確率は } \frac{I}{N} \text{ の 60\%} \\ \quad \text{(例. 家庭内の共用タオルに病原体が付着している確率)} \\ \gamma = 70 : \text{単位時間あたりに感染経路と接触する回数の期待値は 70 回} \end{array} \right. \quad (1.22)$$

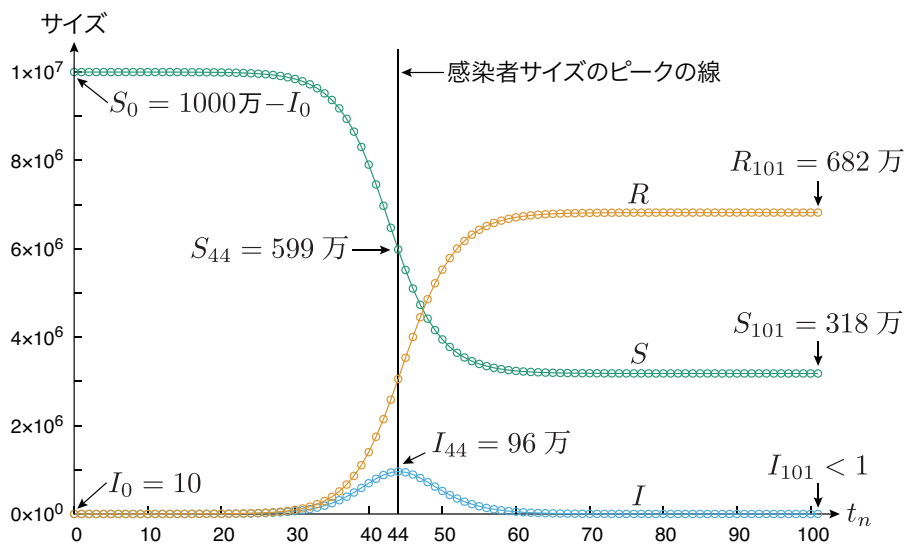
とする. このとき, 感染伝達係数 σ は, $\sigma = 8.4 \times 10^{-8}$ である.

このパラメータの意味は以下のようなものである.

$$\sigma I_n \tau = \beta \times \alpha \frac{I_n}{N} \times \gamma \tau$$

は, 第 n 週から第 $n+1$ 週の 1 週間で, 感染経路に平均 $\gamma \tau = 70$ 回接触し, そのうち, 感染経路に病原体が付着していて感染が可能となる確率が $\alpha \frac{I_n}{N} = 60 \frac{I_n}{N} \%$ で, その感染可能性のある感染経路と接触して実際に感染する確率は $\beta = 2\%$ のような分解で解釈する.

このとき, 基本再生産数は $\mathcal{R}_0 = 1.679998 > 1$ となり, 感染は流行する. 実際, SIR 数列モデル (1.18)(1.19)(1.20) に従って, S_n, I_n, R_n ($n = 1, 2, \dots$) を計算していくと, 下図を得る.



感染者数のピークは $n = 44$ ($t_{44} \doteq 10$ ヶ月) のときで、このとき、

$$S_{44} = 599 \text{ 万}, \quad I_{44} = 96 \text{ 万}, \quad R_{44} = 305 \text{ 万}$$

である。また、はじめて $I_n < 1$ となるのは $n = 101$ ($t_{101} \doteq 2$ 年) のときで、このとき、

$$S_{101} = 318 \text{ 万}, \quad I_{101} < 1, \quad R_{101} = 682 \text{ 万}$$

である。

たった $I_0 = 10$ から始まったにもかかわらず、基本再生産数が $\mathcal{R}_0 = \frac{\sigma S_0}{\rho} = 1.68 > 1$ なので、感染者は増殖し、ピークは第 44 週で $I_{44} = 96$ 万となった。

§10 行動制限と感染対策

本節では、前節で得られた感染率 $f(I, \tau)$ と感染伝達係数 σ から、行動制限と感染対策の効果について論じる。

基本再生産数 $\mathcal{R}_0$ は、

$$\mathcal{R}_0 = \frac{\sigma S_0}{\rho} = \frac{\beta S_0}{\rho N} \alpha \gamma$$

と分解できるが、 $\frac{\beta S_0}{\rho N}$ は、個々人でコントロールするのは難しい項である。

しかし次のように考えて $\mathcal{R}_0 > 1$ を $\mathcal{R}_0 < 1$ にする可能性を見いだしたい。

もし、総人口 N が λ 倍されたとし、 S , I , R の各数も一様に λ 倍されたとする。このとき、(1.11) から、

$$\lambda I_{n+1} \approx \lambda I_n + \sigma(\lambda S_0)(\lambda I_n)\tau - \rho(\lambda I_n)\tau + o(\lambda I_n)$$

となるが両辺を λ で割って、

$$I_{n+1} \approx \left(1 + \left(\lambda \frac{\sigma S_0}{\rho} - 1\right) \rho \tau\right) I_n + o(I_n)$$

を得る。すなわち、基本再生産数も λ 倍される。よって、例えば、

$$\mathcal{R}_0 = 2.5 \longrightarrow \lambda \mathcal{R}_0 = 0.5$$

にしたかったら、 $\lambda = 0.2$ とすればよい。これは、

$$\lambda \mathcal{R}_0 = \frac{\beta S_0}{\rho N} \alpha(\lambda \gamma)$$

と考えると、 γ を λ 倍することにより達成される。 γ は単位時間あたりの感染経路との平均接触回数だから、それを $\lambda = 0.2$ 倍することは、標語的には、通常の状態から「人との接触 8 割減」という行動制限となるだろう。

他方、

$$\lambda \mathcal{R}_0 = \frac{\beta S_0}{\rho N} (\lambda \alpha) \gamma$$

と考えると、感染対策により α を $\lambda = 0.2$ 倍することは、標語的には $1/\lambda = 5$ 倍の感染対策を講じることに対応する。これは手指消毒やマスク以上の強力な感染対策が必要だろうから何をすればよいやら実現する方法が難しそうである。

そこで行動制限と組み合わせて、 $(\lambda_1 \alpha)(\lambda_2 \gamma) = \lambda(\alpha \gamma)$ となるように、例えば $\lambda_1 = 0.5$, $\lambda_2 = 0.4$ とする。このとき「人との接触 6 割減、感染対策 2 倍」となって何とか達成できそうな気がしてくる。

§11 最終規模方程式

第 n 週までに感染した感受性者のサイズは、 $S_0 - S_n$ であり、その S_0 に対する相対的な大きさ (第 n 週の規模) を

$$F_n = \frac{S_0 - S_n}{S_0}$$

とおく．最終的な感染者割合，すなわち**最終規模**

$$F_{\infty} = \frac{S_0 - S_{\infty}}{S_0}$$

を $\mathcal{R}_0$ だけから求めることが目標である．各 n について， $0 < S_n < S_0$ だから $0 < F_n < 1$ である．一方， $0 \leq S_{\infty} < S_0$ だから $0 < F_{\infty} \leq 1$ で， $S_{\infty} > 0$ と $F_{\infty} < 1$ は同値である．

まず，(1.18)(1.19) を辺々足して， S_n, I_n を左辺に移項し， $n = j - 1$ を代入すると，

$$S_j - S_{j-1} + I_j - I_{j-1} = -\rho I_{j-1} \tau$$

を得る．辺々を $j = 1, 2, \dots, n$ について足すと，

$$S_n - S_0 + I_n - I_0 = -\rho \sum_{j=1}^n I_{j-1} \tau \quad (1.23)$$

となる．

次に，(1.18) で $n = j - 1$ において，整理すると，

$$I_{j-1} = \frac{1}{\sigma \tau} \log \frac{S_{j-1}}{S_j}$$

となる．これを (1.23) の右辺の和の中に代入し，両辺を $-S_0$ で割り，基本再生産数 $\mathcal{R}_0 = \frac{\sigma S_0}{\rho}$ を用いて整理すると，

$$\frac{S_0 - S_n}{S_0} + \frac{I_0 - I_n}{S_0} = \frac{\rho}{\sigma S_0} \sum_{j=1}^n \log \frac{S_{j-1}}{S_j} = \frac{1}{\mathcal{R}_0} \log \frac{S_0}{S_n}$$

を得る．よって，

$$\mathcal{R}_0 \left(F_n + \frac{I_0 - I_n}{S_0} \right) = \log \frac{S_0}{S_n}$$

となる．両辺の極限 $n \rightarrow \infty$ をとると，

$$\mathcal{R}_0 \left(F_{\infty} + \frac{I_0}{S_0} \right) = \log \frac{S_0}{S_{\infty}}$$

となる． $F_{\infty} \leq 1$ より左辺は有限の値であるから，右辺において $S_{\infty} > 0$ がわかる．したがって， $F_{\infty} < 1$ である．よって，右辺において，

$$\frac{S_0}{S_{\infty}} = \frac{1}{1 - F_{\infty}}$$

と変形して、最終規模 F_∞ の満たす方程式

$$\log \frac{1}{1 - F_\infty} = \mathcal{R}_0 \left(F_\infty + \frac{I_0}{S_0} \right) \quad (1.24)$$

を得る. さらに、初期条件 (1.21) のもとで $\frac{I_0}{S_0} \approx 0$ と仮定すれば、(1.24) からもっと簡単な近似式

$$\log \frac{1}{1 - F_\infty} = \mathcal{R}_0 F_\infty \quad (1.25)$$

を得る. (1.24) や (1.25) を**最終規模方程式**と呼ぶ. 特に、(1.25) は基本再生産数 $\mathcal{R}_0$ だけがわかれば最終規模がわかることを意味している.

上述した数値例でみたように、パラメータ (1.22) のもとで、実質最終週の第 101 週の規模は、 $S_0 = 1000$ 万 - 10, $S_{101} = 318$ 万 から $F_{101} = \frac{S_0 - S_{101}}{S_0} = 68.2\%$ がわかる.

一方、基本再生産数は $\mathcal{R}_0 = 1.68$ であった. 同じパラメータで (1.24) や (1.25) を F_∞ についてニュートン法で解くと、いずれも最終規模 $F_\infty = 68.2\%$ を得る.

これは SIR 数列モデルを (第 101 週まで) 解かなくとも、初期値とパラメータだけから、特に $I_0 \ll S_0$ の場合は基本再生産数だけから、感染症流行の最終規模がわかることを意味している. このパラメータの場合、およそ 7 割の人が感染して流行が終息することが初期の段階でわかる.

§12 ケルマック-マッケンドリックの SIR モデルの離散化の観点から

1 回連続微分可能な関数 $S(t)$, $I(t)$, $R(t)$ を導入し、初期値を

$$S(0) = S_0, \quad I(0) = I_0, \quad R(0) = R_0$$

として、SIR 数列モデル (1.18)(1.19)(1.20) の解 S_n , I_n , R_n に、各時刻 t_n で、

$$S(t_n) = S_n, \quad I(t_n) = I_n, \quad R(t_n) = R_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

と対応させる．この対応のもとで，(1.18)(1.19)(1.20) の各式を次のように変形する．

$$\begin{aligned}\frac{S(t_{n+1}) - S(t_n)}{\tau} &= S(t_n) \frac{e^{-\sigma I(t_n)\tau} - 1}{\tau} \\ \frac{I(t_{n+1}) - I(t_n)}{\tau} &= S(t_n) \frac{1 - e^{-\sigma I(t_n)\tau}}{\tau} - \rho I(t_n) \\ \frac{R(t_{n+1}) - R(t_n)}{\tau} &= \rho I(t_n)\end{aligned}$$

τ が十分小さいとして展開し， $t = t_n$ とおくと，

$$\frac{S(t_{n+1}) - S(t_n)}{\tau} = \frac{dS}{dt}(t) + o(\tau), \quad \frac{e^{-\sigma I(t_n)\tau} - 1}{\tau} = \left. \frac{d}{d\tau} e^{-\sigma I(t)\tau} \right|_{\tau=0} + o(\tau) = -\sigma I(t) + o(\tau)$$

などより， $o(\tau)$ 以外の主要項は，

$$\frac{dS}{dt}(t) = -\sigma S(t)I(t) \quad (1.26)$$

$$\frac{dI}{dt}(t) = \sigma S(t)I(t) - \rho I(t) \quad (1.27)$$

$$\frac{dR}{dt}(t) = \rho I(t) \quad (1.28)$$

となる．この常微分方程式系を提案者の名前をとってケルマック-マッケンドリック (W. O. Kermack & A. G. McKendrick (1927 年)) の **SIR モデル** と呼ぶ．

SIR モデルの大きな特徴は，2 つの不変量をもつことである．実際，

$$\frac{d}{dt}(S(t) + I(t) + R(t)) = 0$$

から，初期値を $S_0 + I_0 + R_0 = N$ とすれば，

$$S(t) + I(t) + R(t) = N \quad (t > 0)$$

が成り立つ．これが第 1 不変量であり，SIR 数列モデルも

$$S_n + I_n + R_n = N \quad (n = 1, 2, \dots)$$

という形で持っていた特徴である．

また，(1.26) と (1.27) の辺々を足すと，

$$\frac{dS}{dt}(t) + \frac{dI}{dt}(t) = -\rho I(t) = \frac{\rho}{\sigma} \frac{d}{dt} \log S(t)$$

から,

$$\frac{d}{dt} \left(S(t) + I(t) - \frac{\rho}{\sigma} \log S(t) \right) = 0$$

がわかる. よって,

$$S(t) + I(t) - \frac{\rho}{\sigma} \log S(t) = S_0 + I_0 - \frac{\rho}{\sigma} \log S_0 \quad (t > 0)$$

が成り立つ. これが第 2 不変量である.

SIR 数列モデルも第 2 不変量を持っていることを確認しよう. (1.18)(1.19) から,

$$\begin{aligned} S_{n+1} + I_{n+1} - \frac{\rho}{\sigma} \log S_{n+1} &= S_n e^{-\sigma I_n \tau} + S_n (1 - e^{-\sigma I_n \tau}) + (1 - \rho \tau) I_n - \frac{\rho}{\sigma} \log (S_n e^{-\sigma I_n \tau}) \\ &= S_n + (1 - \rho \tau) I_n - \frac{\rho}{\sigma} \log S_n + \rho I_n \tau \\ &= S_n + I_n - \frac{\rho}{\sigma} \log S_n \end{aligned}$$

これより, SIR 数列モデルも

$$S_n + I_n - \frac{\rho}{\sigma} \log S_n = S_0 + I_0 - \frac{\rho}{\sigma} \log S_0 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

という形で第 2 不変量を持っていることがわかった.

ケルマック-マッケンドリックの SIR モデル (1.26)(1.27) は, 次の同値な形に変形できる ((1.28) は同じ式).

$$\frac{d}{dt} (\log S(t)) = -\sigma I(t) \tag{1.29}$$

$$\frac{dS}{dt}(t) + \frac{dI}{dt}(t) = -\rho I(t) \tag{1.30}$$

これらを $S_n \approx S(t_n)$ と対応させ, 時間増分を τ として, オイラー法で離散化すると,

$$\frac{\log S_{n+1} - \log S_n}{\tau} = -\sigma I_n \tag{1.31}$$

$$\frac{S_{n+1} - S_n}{\tau} + \frac{I_{n+1} - I_n}{\tau} = -\rho I_n \tag{1.32}$$

となって, SIR 数列モデル (1.18)(1.19) を得る.

素朴に SIR モデル (1.26)(1.27)(1.28) をそのままオイラー法で離散化すると,

$$\begin{aligned}\frac{S_{n+1} - S_n}{\tau} &= -\sigma S_n I_n \\ \frac{I_{n+1} - I_n}{\tau} &= \sigma S_n I_n - \rho I_n \\ \frac{R_{n+1} - R_n}{\tau} &= \rho I_n\end{aligned}$$

となる. これより第 1 不変量を持つことはわかるが, 第 2 不変量は持たない.

一般に, 微分方程式の離散化という観点から見てみると, 同値な (筋の良い) 微分方程式に変形してから離散化することで, 今回のように 2 つの不変量をそのまま維持できるなど, 連続版のもつ性質を離散版でもそのまま引き継げる場合がある. 与えられた微分方程式を闇雲に離散化する必要はないことの好例であろう.

『差分は微分の近似であるが, 微分はさまざまな差分の近似でもある』ことは意識するとよい.

第 2 章

ポアソン分布とポアソン過程

§1 幾何分布と 2 項分布

2 種類の互いに排反な結果 (例えば, 成功 (success, S) と失敗 (failure, F)) を生じる試行 (偶然に左右されて決まる実験や観察) があったとして, 事象 S が起こる確率を $P(S) = p$, 事象 F が起こる確率を $P(F) = 1 - p$ とする ($p \in [0, 1]$). 例えば, サイコロを 1 回振って 1 の目が出る事象を S , 1 以外の目が出る事象を F , 全事象を Ω とすると, $S = \{1\}$, $F = \{2, 3, \dots, 6\}$, $\Omega = S + F$ で, $p = 1/6$, $P(\Omega) = P(S) + P(F) = 1$ である.

このような試行を同じ条件で前後の結果に依存しない形で繰り返す試行, つまり独立に繰り返す試行を反復試行 (repeated trials) と呼ぶ.

例 反復試行において成功するまでの回数を X とする. $k = 1, 2, \dots$ に対して $X = k$ である事象が起こる確率を $P(X = k)$ と書くと,

$$P(X = k) = (1 - p)^{k-1} p \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (2.1)$$

である.

この例の成功するまでの回数のように, 偶然現象に現れる変量, つまり確率的に定まる変数を確率変数 (random variable) という. 特に, 確率変数 X が飛び飛びの値をとるとき, つまり X のとりうる値が高々可算個であるとき, X は離散的である, あるいは X は離散確率変数 (離散的確率変数, 離散型確率変数) であるという. この例の X のとりうる値の集合は $\mathbb{N}$ であるので, X は離散確率変数である.

また, (2.1) はすべての $k \in \mathbb{N}$ に対して $X = k$ となる確率を記述している. 一般にある事象の確率を考えたとき, それぞれの事象がどのような確率で起こるかをすべて述べたものを確率分布 (probability distribution) という.

(2.1) で表される確率分布を, パラメータ p の幾何分布 (geometric distribution) といい $\text{Geo}(p)$ と表す. 離散確率変数 X が $\text{Geo}(p)$ に従うことを $X \sim \text{Geo}(p)$ と書く. 例えば, サイコロを繰り返し投げて最初に 1 の目が出るまでの回数を X とすると, $X \sim \text{Geo}(1/6)$ である.

離散確率変数 X に対して, $f(k) = P(X = k)$ を確率質量関数 (probability mass function) という. p をパラメータとし (2.1) の右辺を k の関数として $f(k) = f(k; p)$ とおくと, f は $\text{Geo}(p)$ の確率質量関数を与える. また, $k \in \mathbb{N}$ に関して $P(X = k)$ の総和は

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k; p) = \sum_{k=1}^{\infty} P(X = k) = \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1} p = \frac{p}{1 - (1-p)} = 1$$

である. これは全事象 $\Omega = \mathbb{N}$ の確率が $P(\Omega) = 1$ であることを意味している.

確率変数 X の期待値 $E(X)$ と分散 $V(X)$ は,

$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k P(X = k), \quad V(X) = E((X - E(X))^2) = E(X^2) - E(X)^2$$

である. $X \sim \text{Geo}(p)$ のとき, その期待値 $E(X)$ と分散 $V(X)$ は, それぞれ

$$E(X) = \frac{1}{p}, \quad V(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

となる.

例 n 回の反復試行において成功した回数を X とする. $k = 0, 1, 2, \dots, n$ に対して $X = k$ である事象が起こる確率は,

$$P(X = k) = {}_n C_k p^k (1-p)^{n-k} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n) \quad (2.2)$$

である.

この例の X のとりうる値の集合は $\{0, 1, 2, \dots, n\}$ であるので, X は離散確率変数である. (2.2) で表される確率分布を, パラメータ n, p の 2 項分布 (binomial

distribution) といい $\text{Bi}(n, p)$ と表す. 例えば, サイコロを繰り返し 10 回振って 1 の目が出る回数を X とすると, $X \sim \text{Bi}(10, 1/6)$ である.

(2.2) の右辺を k の関数として $f(k) = f(k; n, p)$ とおくと, f は $\text{Bi}(n, p)$ の確率質量関数を与える. また, $k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ に関して $P(X = k)$ の総和は

$$\sum_{k=0}^n f(k; n, p) = \sum_{k=0}^n {}_nC_k p^k (1-p)^{n-k} = (p + (1-p))^n = 1$$

である. これは全事象 $\Omega = \{0, 1, 2, \dots, n\}$ の確率が $P(\Omega) = 1$ であることを意味している.

$X \sim \text{Bi}(n, p)$ のとき, その期待値 $E(X)$ と分散 $V(X)$ は, それぞれ

$$E(X) = np, \quad V(X) = np(1-p)$$

となる.

§2 2 項分布からポアソン分布へ

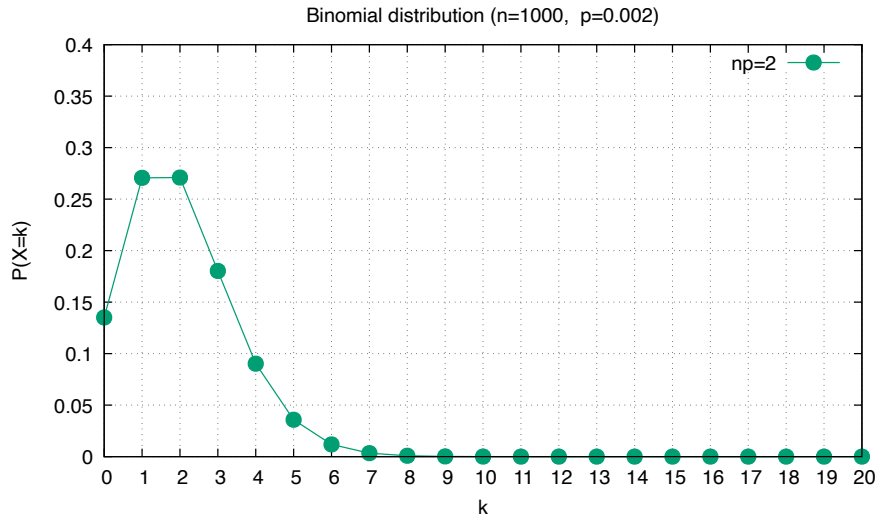
2 項分布において, n が大きく (大量の実験・観察), p が小さい (稀少な現象・成功) 場合を考える.

例 不動産相談において相談件数を n , 契約成立となる確率を p , 契約成立となる件数を X とする. $X \sim \text{Bi}(n, p)$ を仮定し, 相談件数を $n = 1000$ 件, 契約成立となる確率 $p = 0.002$ (0.2%) としたとき, もし 3 件の契約成立があったら, この確率は

$$P(X = 3) = {}_{1000}C_3 (0.002)^3 (0.998)^{997}$$

である.

$X \sim \text{Bi}(1000, 0.002)$ の場合, 期待値 (平均契約成立件数) は $E(X) = np = 2$ である. $k = 1, 2, 3$ あたりは期待値付近だから高確率になるだろうと予想される. 実際, 2 項分布 $\text{Bi}(1000, 0.002)$ の様子は次のようになる.



一般に $np = \lambda > 0$ を固定したまま, $X \sim \text{Bi}(n, p)$ の確率質量関数 $f(k; n, p)$ の $n \rightarrow \infty$ ($p = \lambda/n \rightarrow 0$) の極限を考えると, 以下のように計算できる. これをポアソンの小数の法則という.

$$\begin{aligned}
 {}_nC_k p^k (1-p)^{n-k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\
 &= \frac{\lambda^k}{k!} \frac{n(n-1)\cdots(n-(k-1))}{n^k} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \\
 &= \frac{\lambda^k}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \\
 &\rightarrow \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \quad (n \rightarrow \infty; \quad k = 0, 1, 2, \dots)
 \end{aligned}$$

こうして得られた確率

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.3)$$

で表される確率分布を, パラメータ λ のポアソン分布 (Poisson distribution) といい $\text{Po}(\lambda)$ と表す. X のとりうる値の集合は $\{0, 1, 2, \dots\}$ であるので, X は離散確率変数である.

上の極限操作から $P(X = k)$ は, 形式的に (有限時間内の) 無限回の反復試行において成功率が小さい事象が起こる回数を X としたときの $k = 0, 1, 2, \dots$ に対して $X = k$ である事象が起こる確率である.

例えば, 1日あたりにメールを受け取る回数, 1時間あたりに駅の改札を通る人数, ランチタイムに食堂に来客する人数, 1分間の Web サーバーへのアクセス数, 分厚

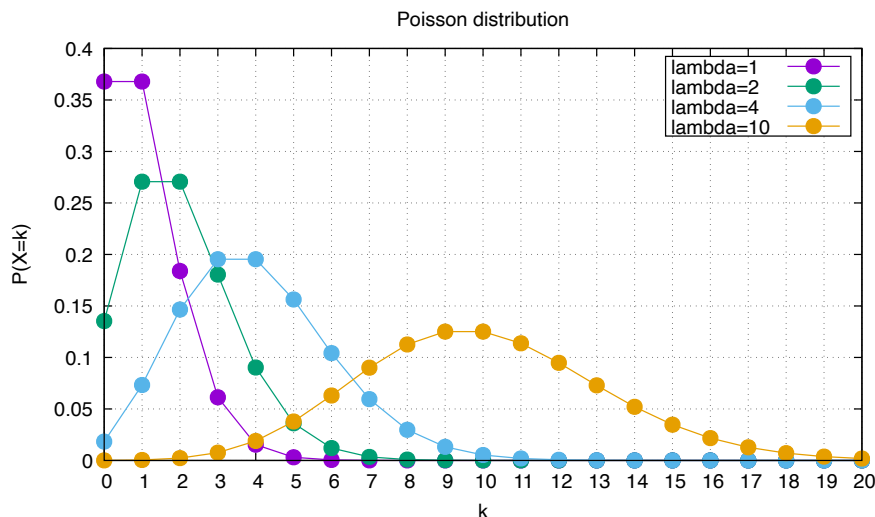
い書籍 100 ページあたりの誤植の数, 血液の単位体積あたりの赤血球の数など, 一定時間に何回起こるか, 一定範囲に何個あるか, といった量はポアソン分布に従うことが多い.

λ をパラメータとし, (2.3) の右辺を k の関数として $f(k) = f(k; \lambda)$ とおくと, f は $\text{Po}(\lambda)$ の確率質量関数を与える. また, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に関して $P(X = k)$ の総和は

$$\sum_{k=0}^{\infty} f(k; \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X = k) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1$$

である. これは全事象 $\Omega = \mathbb{N} \cup \{0\}$ の確率が $P(\Omega) = 1$ であることを意味している.

ポアソン分布 $\text{Po}(\lambda)$ ($\lambda = 1, 2, 4, 10$) の様子は次のようになる. $np = \lambda$ のもとで n が大きく p が小さい場合, $\text{Po}(\lambda)$ は $\text{Bi}(n, p)$ をよく近似している.



特に $\text{Bi}(1000, 0.002)$ と $\text{Po}(2)$ はほとんど同じ形であることがわかる. 冒頭の例において, $X \sim \text{Bi}(1000, 0.002)$ のとき $P(X = 3) = 0.180266$ で, $X \sim \text{Po}(2)$ のとき $P(X = 3) = 0.180447$ である.

$X \sim \text{Po}(\lambda)$ のとき, その期待値 $E(X)$ と分散 $V(X)$ は, それぞれ

$$E(X) = \lambda, \quad V(X) = \lambda$$

となる. これは直観的に, $\text{Bi}(n, \lambda/n)$ に従う確率変数 X の期待値と分散が, それぞれ $E(X) = \lambda$, $V(X) = \lambda(1 - \lambda/n)$ であることから納得できる.

§3 ポアソン過程

ポアソン分布 $Po(\lambda)$ は, $np = \lambda$ のもとで n が大きく p が小さい場合, 2 項分布 $Bi(n, p)$ をよく近似しており, 確率変数は有限時間内の無限回の反復試行において成功率が小さい事象が起こる回数とみなすことができた. 本節ではポアソン分布をでたために起こる事象のモデルであるポアソン過程から導出することによって, パラメータ λ の意味を理解しよう.

ポアソン過程 (Poisson process) は, 以下の三つの仮定にしたがって事象が起こるモデルである.

仮定 1 (独立性, 無記憶性, 残留効果がないこと) 事象は互いに独立に起こる. すなわち, ある時間区間 $[t_0, t_0 + \Delta t)$ において k 回事象が起こる確率は, t_0 より前の時間において事象が起きた回数 (生起回数) には無関係である.

仮定 2 (定常性) ある事象が起こる確率はどの時間帯でも同じである. すなわち, ある時間区間 $[t_0, t_0 + \Delta t)$ において k 回事象が起こる確率は, t_0 には無関係で, k と区間の長さ Δt のみに依存する.

仮定 3 (希少性, 整列性) 長さ Δt の時間区間において 2 回以上事象が起こる確率は, $o(\Delta t)$ ($\Delta t \rightarrow +0$) である. これは同一時刻に 2 回以上事象が起こる可能性がなく, 事象はある時間離れて 1 回ずつ順序よく起こることを意味している.

この三つの仮定を満たす確率はどのような性質をもっているのかを調べる.

例 道路のある地点を通過する車の台数を考える. 仮定 1, 2 は車は互いに申し合わせなく (独立性), 一定の割合で (定常性) で通過すること, 仮定 3 は複数台同時に通過することはないこと (希少性, 整列性) を意味している. 特に片側 1 車線道路ならば複数台同時通過はあり得ない.

長さ $\Delta t > 0$ の時間区間において k 回事象が起こる確率を $P_k(\Delta t)$ とする. 仮定 1, 2 から, 確率 $P_k(\Delta t)$ は時間区間の始まりの時刻の取り方や, それ以前の時間における生起回数に影響を受けない.

仮定 1, 2, 3 から, 長さ $\Delta t > 0$ の時間区間においてちょうど 1 回事象が起こる確

率は、ある正定数 λ を用いて、

$$P_1(\Delta t) = \lambda \Delta t + o(\Delta t) \quad (\Delta t \rightarrow 0) \quad (2.4)$$

と表されることを示そう。

長さ 1 のある時間区間を考え、この時間区間内にいかなる事象も起こらない確率を ϕ とする。

$$\phi = P_0(1)$$

である。

この時間区間を n 等分する。長さ 1 のある時間区間内で事象が起こらないことと、 n 等分割された各時間区間で事象が起こらないことは同じであるから、仮定 1, 2 より、

$$\phi = P_0(1/n)^n$$

である。よって、長さ $1/n$ の時間区間内で事象が起こらない確率は、

$$P_0(1/n) = \phi^{1/n}$$

となる。よって、長さ k/n の時間区間内で事象が起こらない確率は、

$$P_0(k/n) = \phi^{k/n}$$

となる。ガウス記号 $[\cdot]$ を用いると、任意の $\Delta t > 0$ に対して、 $[n\Delta t] \leq n\Delta t < [n\Delta t] + 1$ であるから、 $k = [n\Delta t] + 1$ とおくと、

$$\frac{k-1}{n} \leq \Delta t < \frac{k}{n}$$

となる。

また、 $P_0(t)$ は t について単調減少である。実際、 $t_1 \leq t_2$ に対して、時間区間 $[0, t_2]$ 内に事象が起こらなければ、その部分区間 $[0, t_1]$ 内でも当然事象は起こらないから、 $P_0(t_2) \leq P_0(t_1)$ である。よって、

$$P_0\left(\frac{k-1}{n}\right) \geq P_0(\Delta t) \geq P_0\left(\frac{k}{n}\right)$$

が成り立つ。これより、

$$\phi^{(k-1)/n} \geq P_0(\Delta t) \geq \phi^{k/n}$$

がわかる. ここで $n \rightarrow \infty$ とすれば,

$$\frac{k-1}{n} \rightarrow \Delta t, \quad \frac{k}{n} \rightarrow \Delta t$$

より,

$$P_0(\Delta t) = \phi^{\Delta t}$$

となる.

$\phi \in [0, 1]$ であるので,

$$(i) \phi = 0 \quad (ii) \phi = 1 \quad (iii) 0 < \phi < 1$$

の三つの場合が考えられる.

(i) の場合は, 任意の $\Delta t > 0$ に対して $P_0(\Delta t) = 0$ である. これは任意の時刻で少なくとも 1 回以上の事象が起こる確率が 1 であるか, いかなる微小区間においてもその中に確率 1 で無限回の事象が起こることを意味しており, 仮定 3 に矛盾する.

(ii) の場合は, 任意の $\Delta t > 0$ に対して $P_0(\Delta t) = 1$ である. これは事象が起こらない自明な場合なので考察から排除する.

よって, (iii) の場合のみ考える. このとき, 適当な $\lambda > 0$ に対して $\phi = e^{-\lambda}$ とおけるので, $P_0(\Delta t) = e^{-\lambda \Delta t}$ となる.

長さ $\Delta t > 0$ の時間区間に事象が起こらない確率を $P_0(\Delta t)$, だた 1 回起こる確率を $P_1(\Delta t)$, 2 回以上起こる確率を $P_{\geq 2}(\Delta t)$ とすると, これらの事象は互いに排反で和事象は全事象だから,

$$P_0(\Delta t) + P_1(\Delta t) + P_{\geq 2}(\Delta t) = 1$$

である. ここで, 仮定 3 から $P_{\geq 2}(\Delta t) = o(\Delta t)$ であるので,

$$P_1(\Delta t) = 1 - e^{-\lambda \Delta t} + o(\Delta t) = \lambda \Delta t + o(\Delta t)$$

がわかり, (2.4) が示された. (2.4) を生起率 λ のポアソン過程と呼ぶ.

§4 ポアソン過程からポアソン分布へ

$t > 0$ と $\Delta t > 0$ に対して, 時間区間 $[0, t + \Delta t)$ に事象が起こらない確率は, $[0, t)$ に事象が起こらない確率に $[t, t + \Delta t)$ に事象が起こらない確率を掛けた積となる.

$$P_0(t + \Delta t) = P_0(\Delta t)P_0(t)$$

$P_0(t) = e^{-\lambda t}$ だったので、確かに上の等式は成り立っている。

時間区間 $[0, t + \Delta t)$ に事象が 1 回起こる確率は、 $[0, t)$ に事象が起こらない確率に $[t, t + \Delta t)$ に事象が 1 回起こる確率を掛けた積と、 $[0, t)$ に事象が 1 回起こる確率に $[t, t + \Delta t)$ に事象が起こらない確率を掛けた積との和となる。

$$P_1(t + \Delta t) = P_0(\Delta t)P_1(t) + P_1(\Delta t)P_0(t)$$

これより、

$$\frac{P_1(t + \Delta t) - P_1(t)}{\Delta t} = \frac{P_0(\Delta t) - 1}{\Delta t}P_1(t) + \frac{P_1(\Delta t)}{\Delta t}P_0(t)$$

となるので、 $P_0(\Delta t) = e^{-\lambda \Delta t}$ と (2.4) から、 $\Delta t \rightarrow +0$ のとき、

$$P'_1(t) = -\lambda P_1(t) + \lambda P_0(t) \quad (2.5)$$

を得る。

$n = 2, 3, \dots$ に対して、時間区間 $[0, t + \Delta t)$ に事象が n 回起こる確率は、 $[0, t)$ に事象が k 回起こる確率に $[t, t + \Delta t)$ に事象が $n - k$ 回起こる確率を掛けた積の、 $k = 0, 1, \dots, n$ についての和となる。

$$P_n(t + \Delta t) = P_0(\Delta t)P_n(t) + P_1(\Delta t)P_{n-1}(t) + \sum_{k=2}^n P_k(\Delta t)P_{n-k}(t)$$

これより、

$$\frac{P_n(t + \Delta t) - P_n(t)}{\Delta t} = \frac{P_0(\Delta t) - 1}{\Delta t}P_n(t) + \frac{P_1(\Delta t)}{\Delta t}P_{n-1}(t) + \sum_{k=2}^n \frac{P_k(\Delta t)}{\Delta t}P_{n-k}(t)$$

となるので、 $P_0(\Delta t) = e^{-\lambda \Delta t}$ 、(2.4) 式、 $P_{\geq 2}(\Delta t) = o(\Delta t)$ から、 $\Delta t \rightarrow +0$ のとき、

$$P'_n(t) = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t) \quad (2.6)$$

を得る。(2.5) と合わせれば、(2.6) は $n = 1, 2, \dots$ に対して成り立つ。

初期値を $P_0(0) = 1$ 、 $P_n(0) = 0$ ($n > 0$) とする。これは $t = 0$ で事象は起こらないこと意味している。生起直後を $t = 0$ としてその後から観測したと考えてもよい。

(2.6) を解くために、

$$P_n(t) = e^{-\lambda t} u_n(t) \quad (n = 1, 2, \dots; u_0(t) = 1)$$

とおく。(2.6) に代入すると、

$$u'_n(t) = \lambda u_{n-1}(t)$$

となる．初期値は $u_n(0) = P_n(0) = 0$ である．

$n = 1$ のとき， $u_0(t) = 1$ より， $u_1(t) = \lambda t$ を得る．

$n = 2$ のとき， $u_2(t) = \frac{\lambda^2}{2} t^2$ を得る．

以後続けていくと， $u_n(t) = \frac{\lambda^n}{n!} t^n$ を得る．これより， $n = 0$ や $t = 0$ のときも含めて，

$$P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} \quad (n = 0, 1, 2, \dots; t \geq 0)$$

が成り立つ．これはポアソン分布 $Po(\lambda t)$ に他ならない．長さ t の時間区間において起こる事象の回数の分布は，ポアソン分布 $Po(\lambda t)$ に従うことがわかった．

確率変数 X が $Po(\lambda t)$ に従っているとき，すなわち $P(X = n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$ のとき，その期待値，つまり事象の起こる回数の平均値は $E(X) = \lambda t$ だった．これは λ は単位時間あたりの平均生起回数であることを意味している．

§5 指数分布

ポアソン過程に従う事象の時間間隔を考える．単位時間あたりの平均生起回数が λ のポアソン過程 (2.4) において，事象が起こる間隔を $t > 0$ とする．

$[0, t)$ で事象が起こらない確率は $P_0(t) = e^{-\lambda t}$ であったから， $[0, t)$ で事象が起こる確率は，

$$P(0 \leq X < t) = 1 - e^{-\lambda t} \quad (t \geq 0)$$

である．負の時間も考えることにして，関数 H を

$$H(t) = \begin{cases} 1 & (t \geq 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases}$$

とし， $X = t$ を考えても値は変わらないから

$$P(X \leq t) = (1 - e^{-\lambda t})H(t) \quad (t \in \mathbb{R}) \quad (2.7)$$

とする．

(2.7) で表される確率分布をパラメータ λ の指数分布 (exponential distribution) といい $\text{Exp}(\lambda)$ と表す．一般に $F(t) = P(X \leq t)$ を累積分布関数という．(2.7) の右辺を $F(t)$ とおくと， F は $\text{Exp}(\lambda)$ の累積分布関数を与える．

指数分布と幾何分布の関係について述べよう.

例題 ある万歩計アプリでは歩数に応じて確率的にポイントが付与される. 歩数が $w = 5000$ 歩以下のときポイントが付与される確率は 50% である. 確率を 90% 以上にするのに何歩以上歩けばよいか.

ある歩数からの 1 歩後にポイントが付与される確率を p とする. どの 1 歩における確率も独立に定まり, どの歩数から 1 歩歩いても確率は変わらず, 1 歩歩いたときにポイントが 2 回付与されることはないとする.

最初の 1 歩でポイントが付与される確率は p である. 2 歩目でポイントが初めて付与される確率は, 1 歩目で付与されず, 2 歩目で付与されるのだから $(1-p)p$ である. k 歩目でポイントが初めて付与される確率は, $k-1$ 歩までに付与されず, k 歩で付与されるのだから $(1-p)^{k-1}p$ である. これより, (2.1) の右辺の確率質量関数 $f(k) = (1-p)^{k-1}p$ を用いて, $n = 5000$ とすると $w = n$ 歩で, ポイントが付与される歩数を X 歩とすると, X が n 以下のときポイントが付与される確率は $1/2$ だから,

$$P(X \leq n) = \sum_{k=1}^n f(k) = 1 - (1-p)^n = \frac{1}{2}$$

である. これより $1-p = 2^{-1/n}$ がわかる.

確率を 90% 以上にするのに必要な歩数を $w' = n'$ 歩としたとき,

$$P(X \leq n') = \sum_{k=1}^{n'} f(k) = 1 - (1-p)^{n'} = 1 - 2^{-n'/n} \geq \frac{9}{10}$$

である. よって,

$$2^{-n'/n} \leq \frac{1}{10} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{n'}{n} \geq \log_2 10 \doteq 3.3$$

から, $n' \geq 16610$, すなわち $w' \geq 16610$ 歩がわかった.

上の計算からわかるように, w や n の具体的な単位や値は任意である. 一般に, ある量以下のときにポイントが付与される確率は 50% だったら, 確率を 90% 以上にするのには 3.3 倍以上の量が必要となることがわかる. 例えば, あるゲームアプリにおいてゲーム継続時間に応じて確率的にポイントが付与されるとしてもよい. 継続時間数が $w = 1$ 時間以下のときポイントが付与される確率は 50% だったら, 確率を 90% 以上にするのには 3.3 時間以上ゲームをしなければならない.

改めて、 $X \sim \text{Geo}(p)$ において、反復試行で成功するまでの回数 X が n 以下である確率は、(2.1) の右辺の確率質量関数 $f(k) = (1-p)^{k-1}p$ を用いて、

$$P(X \leq n) = \sum_{k=1}^n f(k) = 1 - (1-p)^n$$

であることがわかった。

この類推で、 $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ に対して、(2.7) の右辺が

$$P(X \leq t) = \int_{-\infty}^t f(x) dx \quad (t \in \mathbb{R})$$

となる関数 $f(x)$ を考えると、 $f(t) = F'(t)$ である。よって、 $f(t) = \lambda e^{-\lambda t} H(t)$ を得る。一般に、確率変数 X の確率分布が $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$ で定まるとき、 $f(x)$ を X の確率密度関数という。累積分布関数 F は f の原始関数の一つである。