特集／極値問題を考える

ディドの問題の数値計算

矢崎　成俊

1. ディドの問題

筆者の特集記事において触れた「周長一定のジョルダン曲線の中で囲む面積が最大のものは何か」という等周問題は，古代ローマの詩人ウェルギリウスの叙事詩『アエネーイス』の伝説[1]にもとづいてしばしばディドの問題と呼ばれる．自らの弟に夫を殺されたフェニキア人の王女エリッサは，祖国を追われ北アフリカ沿岸部 (現在のチュニジア付近) に漂着した．居住地を確保するためアフリカの先住民と交渉し，牛一頭の皮で覆えるだけという条件で土地を分与された．エリッサは一計を案じ，牛の皮 (ビュルサ) を細長くひも状にして，それで囲めるだけの広大な土地を手に入れた (図 1)．これが古代都市国家カルタゴの建国に繋がったという「伝説」である．アフリカの先住民は，エリッサのことを，彼女の紆余曲折した遍歴から「さすらう者」の意としてディドと呼んだという[2]．

図 1

ディドの戦略を勾配流方程式として定式化してみよう．図 2 のように，x 軸を地中海沿岸，上半平面をアフリカ側とし，ビュルサから作ったひもを，時間変化する開曲線 $\mathcal{C}(t)$ とする．

$$\mathcal{C}(t) = \{\boldsymbol{X}(u,t) \in \mathbb{R}^2;\ u \in [0,1],\ \text{条件}\ (*)\}$$

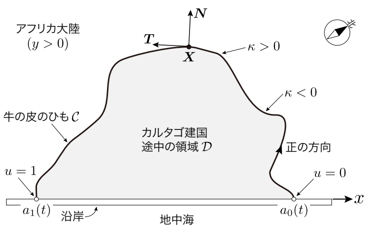

図 2

曲線 $\mathcal{C}$ は両端点で x 軸に直交しながら，両端点は x 軸上を動くという条件 $(*)$ を課す．すなわち，$\boldsymbol{T}$ を単位接線ベクトル，$\boldsymbol{N}$ を外向き単位法線ベクトルとしたとき，$\boldsymbol{e} = {}^t(1,0)$ とし，

$$(*):\ \ \boldsymbol{X}(i,t) = a_i(t)\boldsymbol{e},\ \ \boldsymbol{N}(i,t) = (-1)^i\boldsymbol{e}$$

とする $(i = 0, 1)$．$\mathcal{C}$ の時間発展方程式は

$$\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial t} = V\boldsymbol{N} + W\boldsymbol{T},\ u \in (0,1),\ t > 0 \quad (1)$$

である．曲線 $\mathcal{C}(t)$ の全長 $\mathcal{L}(t)$ を保存しながら，$\mathcal{C}(t)$ と線分 $[a_1(t), a_0(t)]$ で囲まれた部分 $\mathcal{D}(t)$ の面積 $\mathcal{A}(t)$ を最大化していく勾配流方程式を考える．$\dot{\mathsf{F}} = \dfrac{d\mathsf{F}}{dt}$ として，$\mathcal{L}$ と $\mathcal{A}$ の時間発展は

$$\dot{\mathcal{L}} = \int_{\mathcal{C}(t)} \kappa V\, ds, \quad \dot{\mathcal{A}} = \int_{\mathcal{C}(t)} V\, ds \qquad (2)$$

となる．ラグランジュの未定乗数 λ を使って，$\dot{\mathcal{A}} - \lambda\dot{\mathcal{L}} \geq 0$ から，法線速度を $V = 1 - \lambda\kappa$ と

し，$\dot{\mathcal{L}} = 0$ から $\lambda = \dfrac{\pi}{\mathcal{L}\langle\kappa^2\rangle}$，$\langle\kappa^2\rangle = \dfrac{1}{\mathcal{L}}\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \kappa^2\, ds$ を得る．これより，法線速度

$$V = 1 - \frac{\pi}{\mathcal{L}\langle\kappa^2\rangle}\kappa \tag{3}$$

は，曲線 $\mathcal{C}$ の全長 $\mathcal{L}$ を保存しながら，面積 $\mathcal{A}$ を最大化していく勾配流方程式を与える．接線速度 W は曲線の形状に影響しないことを利用して，次節で，数値計算の一様配置法に用いる．

2. 折れ線近似

(1) を数値計算する．曲線 $\mathcal{C}$ を折れ線 Γ で，領域 $\mathcal{D}$ を Ω でそれぞれ近似する．Γ は頂点 $\{\boldsymbol{X}_i\}_{i=0}^{N}$ を N 辺の線分 Γ_i で繋いだ折れ線である (図 3).

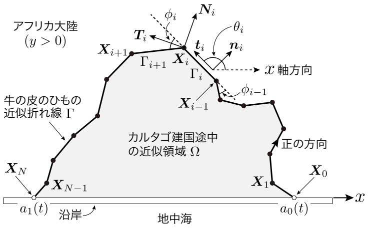

図 3

第 i 辺 Γ_i の長さを r_i とすると，Γ_i の単位接線ベクトルは $\boldsymbol{t}_i = \dfrac{\boldsymbol{X}_i - \boldsymbol{X}_{i-1}}{r_i}$ となる．単位法線ベクトルは $\det(\boldsymbol{n}_i, \boldsymbol{t}_i) = 1$ となるように定める．頂点 $\boldsymbol{X}_i$ における外角を ϕ_i とし，Γ_i 上の量 f_i の頂点 $\boldsymbol{X}_i$ における平均を $\mathrm{av}_i\mathsf{f} = \dfrac{\mathsf{f}_i + \mathsf{f}_{i+1}}{2\cos(\phi_i/2)}$ とする．頂点 $\boldsymbol{X}_i$ における単位接線ベクトルと単位法線ベクトルを，それぞれ $\boldsymbol{T}_i = \mathrm{av}_i\boldsymbol{t}$，$\boldsymbol{N}_i = \mathrm{av}_i\boldsymbol{n}$ と定義する $(i \in [1, N))$．端点では $\boldsymbol{N}_0 = \boldsymbol{e} = -\boldsymbol{N}_N$ である．(1) の近似で，Γ の発展方程式を

$$\dot{\boldsymbol{X}}_i = V_i\boldsymbol{N}_i + W_i\boldsymbol{T}_i,\ i \in [1, N),\ t > 0 \tag{4}$$

とする．法線速度 V_i を Γ_i 上の量 v_i を用いて $V_i = \mathrm{av}_i v$ と分解し，$p_i = \tan\dfrac{\phi_i}{2} + \tan\dfrac{\phi_{i-1}}{2}$ とおいて，Γ_i 上の離散曲率を $\kappa_i = \dfrac{p_i}{r_i}$ とすると，全長 $L = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} r_i$ の時間発展は $\dot{L} = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \kappa_i v_i r_i$ となる．また，面積 $A = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{X}_i \cdot \boldsymbol{X}_{i-1}^{\perp}$ の時間発展は $\dot{A} = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} v_i r_i + \mathrm{err}_A$ (誤差項) となる．図 4 のような一様配置法による W_i を用いれば，$r_i \equiv \dfrac{L}{N}$ となるように頂点 $\boldsymbol{X}_i$ を接線 $\boldsymbol{T}_i$ 方向に動かすことができて $\mathrm{err}_A = 0$ を得る．こうして，$\dot{L}$ と $\dot{A}$ は (2) の離散化に対応する (詳細は拙著[3])．

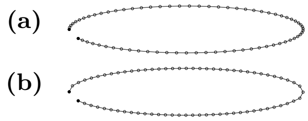

図 4：非一様配置 (a) と一様配置 (b)

図 5 と図 6 は，一様配置した初期折れ線を，(3) の近似として，Γ_i 上の法線速度 $v_i = 1 - \dfrac{\pi_N}{L\langle\kappa^2\rangle}\kappa_i$，$\pi_N = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} p_i$，$\langle\kappa^2\rangle = \dfrac{1}{L}\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \kappa_i^2 r_i$ を用いて，(4) をルンゲクッタ法で解いた結果である．

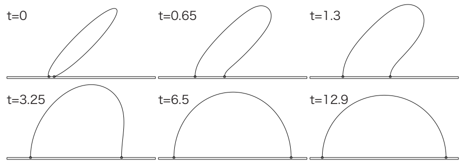

図 5　$\Gamma(0)$：楕円の一部

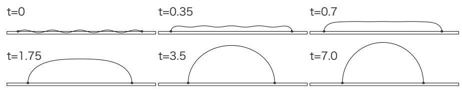

図 6　$\Gamma(0)$：サインカーブの一部

十分時間が経ったとき，折れ線は半円弧に漸近している．実際，ディドの問題の解は半円弧であることが，等周問題のフルヴィッツの解法と類似の方法で証明できる[4]．また，工夫すれば時間を離散化しても全長保存・面積増大は可能であろう[5]．

参考文献

1) ウェルギリウス (著), 杉本正俊 (訳),『アエネーイス』, 新評論，2013.
2) 栗田伸子，佐藤育子，『通商国家カルタゴ』，講談社学術文庫，2016.
3) 矢崎成俊，『動く曲線の数値計算』，共立出版，2019.
4) 岡本久，『日常現象からの解析学』，近代科学社，2016.
5) K.Sakakibara & Y.Miyatake, *J. Comput. Phys.* **424** (2021) No.109857.

（やざき・しげとし，明治大学）