

極値問題と関数のグラフの描画

関数の極値とその応用 (高校生から大学院生に向けて)

関数の極値とその効用

矢崎 成俊

1. 1 変数関数の極値：増減表

(高校生、大学 1 年生に向けて)

標準的な高校数学 III の問題からはじめよう.

問題 関数 $y = \frac{1}{1+3x^2}$ のグラフをかけ.

解答例 導関数 y' , y'' を計算して、以下のよう
な増減、凹凸の表 (俗称、増減表) を作る.

x		$-1/3$		0		$1/3$	
y''	+	0	-	-	-	0	+
y'	+	$9/8$	+	0	-	$-9/8$	-
y	↗	$3/4$	↖	1	↘	$3/4$	↘

極限 $\lim_{|x| \rightarrow \infty} y = 0$ から、無限遠方で x 軸に漸近
することがわかる. また、 $y > 0$ や偶関数 (y 軸に
ついて線対称) であることに注意して、所望のグ
ラフの概形 (図 1) を得る. ■

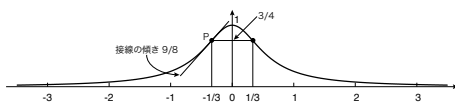


図 1

図 1 の 2 つの●点 ($\pm 1/3, 3/4$) は変曲点で、左
の変曲点 P における接線の傾きは $9/8 > 1$ な
ので、45 度より大きい傾きである. 普通自動車では
45 度の坂道は登れない. グラフを山の稜線に見立
て、左側の裾野から歩いて登山するとする. この
とき変曲点 P が登り道のピーク、いわば胸突き八
丁になる. 八丁とは、現代の単位に換算すると、
丁 = 360 尺、3.3 尺 = 1 m から、8 丁 $\approx$ 873 m で

ある. 富士山頂付近の険しい八丁をいったことか
ら、登りのきつい難所、転じて、物事を成し遂げるの
に一番苦しい時期を表す言葉になった. 富士山の高
さを 3776 m とすると、山頂から $873/3776 \approx 1/4$
の割合だから、上のグラフの変曲点 P の高さ $3/4$
は、文字通り胸突き八丁となっている.

今回の特集のキーワードは極値. 上の問題では
山頂が極値で、登り坂と下り坂のピークは導関数
 y' の極値だった. このように変曲点や極値をとる
 x の値がわかると、増減表を書くことが出来て、グ
ラフの様子がよくわかる. では変曲点や極値をと
る x の値が求まらない場合でも増減表はかけるの
だろうか. 立方体針金枠にシャボン膜を張る実験
を通して考えよう.

実験 バケツに満たした洗剤溶液 (水+台所用
洗剤+洗濯糊かグリセリン) に立方体針金枠を浸
す (図 2 (a)). そっと持ち上げると針金枠にシャ
ボン膜が張られる. このとき、膜は図 2 (b) のよ
うに立方体の 6 面に張られるのだろうか?

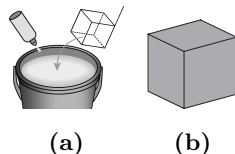


図 2

観察 針金枠を静かに持ち上げて、枠にシャ
ボン膜を張ると、図 3 (a)(b) のように、台形 8 枚、
2 等辺三角形 4 枚、正方形 1 枚の計 13 枚の膜が張

られる．過渡的に 2 等辺三角形 12 枚の膜が張られ瞬時的に (c) のようになる場合もある．

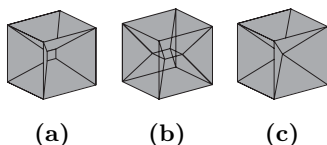


図 3

表面張力により膜は表面積を極小にするように張る．実験すると実感できるが，図 3 (c) よりも (a)(b) の膜の張り方が選択される．数学的には (a)(b) の膜の表面積があらゆる膜の張り方の中で極小であることを意味する．本当か検証しよう．

立方体の一辺の長さを 1，図 3 (a)(b) の小さい正方形の一辺の長さを x ，正方形 1 枚，等脚台形 8 枚，2 等辺三角形 4 枚の合計 13 枚の図形で膜が張られているとする．膜の総面積を $f(x)$ とすると，

$$f(x) = x^2 + \sqrt{2}(1-x) + 2(1+x)\sqrt{(1-x)^2 + 1}$$

となる ($0 \leq x < 1$)．図 3 (c) の膜の総面積は $f(0) = 3\sqrt{2} \approx 4.2$ である．図 2 (b) の立方体の全 6 面に張った膜の総面積 6 よりも小さいが，うまくすれば全 6 面に膜を張ることも可能である．

問題 関数 $f(x)$ のグラフをかけ．また，ある $x_* \in (0, 1)$ が唯一存在して， $f(x_*) < f(0)$ となることを示せ．

解答例 $f(x)$ は 2 次多項式＋無理関数の形をしているので，3 回微分すれば何とかなるだろうと楽観視する．一方，無理関数の部分は $g(x) = \sqrt{(1-x)^2 + 1}$ とおいて整理して，

$$f'(x) = 2x - \sqrt{2} + 2g(x) - \frac{2(1-x^2)}{g(x)}$$

$$f''(x) = 2 - \frac{4(1-x)}{g(x)} + \frac{6(1+x)}{g(x)^3}$$

$$f'''(x) = \frac{6(3-2x)}{g(x)^5}$$

を得る． $f'(x) = 0$ や $f''(x) = 0$ となる x の値はわからないので，普通の方法で増減表を作るのは難しい．しかし，3 階導関数の分子が嬉しい形になっているので，ここから切り崩していく．

まず区間 $[0, 1]$ で $f'''(x) > 0$ である．よって

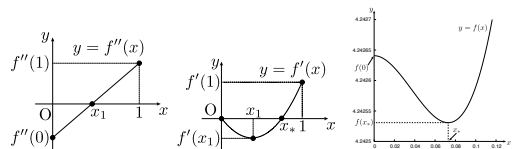
$f''(x)$ は単調増加で， $f''(0) < 0$ ， $f''(1) > 0$ より，中間値の定理から，ある $x_1 \in (0, 1)$ が唯一存在し $f''(x_1) = 0$ を満たす (図 4 (a))．

次に $f'(0) = 0$ より $f'(x_1) < 0$ がわかる．区間 $(x_1, 1]$ で $f''(x) > 0$ で， $f'(1) > 0$ より，再び中間値の定理から，ある $x_* \in (x_1, 1)$ が唯一存在し $f'(x_*) = 0$ を満たす (図 4 (b))．

以上より増減表を書くことができる．

x	0		x_1		x_*		1
f''	−	−	0	+	+	+	+
f'	0	−	−	−	0	+	+
f	$3\sqrt{2}$	↘	変曲点	↘	極小値	↗	5

増減表より， $f(0) = 3\sqrt{2} > f(x_*)$ がわかり，関数 $y = f(x)$ のグラフの概形を得る (図 4 (c))．■



(a) 概念図 (b) 概念図 (c) y 方向を拡大
図 4

このように， x_1 や x_* など具体的な値はわからなくても，増減表を書けることがわかった．近似的には，数値計算 ($f'(x) = 0$ を満たす近似値 x を見つけるニュートン法など) により， $x_* \approx 0.0729$ がわかる．これより $f(x_*) \approx 4.2425$ を得る．一方， $f(0) \approx 4.2426$ だから，ぎりぎりだが確かに $f(x_*) < f(0)$ が成り立っている．

厳密には図 3 はいずれもプラトーの法則 (安定な平衡形の膜の張り方) に抵触しており，一時的な (不安定な) 膜の張り方である．実際，枠をバケツから引き上げたとき，一瞬間図 3 (c) になり，過渡的に図 3 (a)(b) の形を経て，最終的にはもう少し大きな丸みを帯びた正方形の形に落ち着くような現象がしばしば観察される (詳細は拙著⁵⁾参照)．

2. 2 変数関数の極値：主成分分析

(大学 2, 3 年生に向けて)

前節は 1 変数関数の増減，凹凸，極値について

考察した．本節では 2 変数関数について考える．2 変数関数のグラフは 3 次元空間内で曲面となり，増減表のような情報の一覧表を作ることができない．極値や鞍点 (峠点) を求めることが解析の最初の目標となる．しかし極値の情報だけでも多くのことがわかる．例えば，最小自乗法は 2 変数関数の極値問題の実用的な応用例だ．しかし，よく知られているので，ここでは最小自乗法に似て非なる主成分分析を紹介する．

仮想テストの結果 100 人の生徒の英語と数学の共に 100 点満点のテストをした (英語のテストは全 5 問，1 問 20 点)．結果，英語の点数は $0 \leq x_i \leq 100$ ，数学は $60 \leq y_i \leq 80$ のような点数の分布となった ($i = 1, 2, \dots, 100$ ，図 5)．

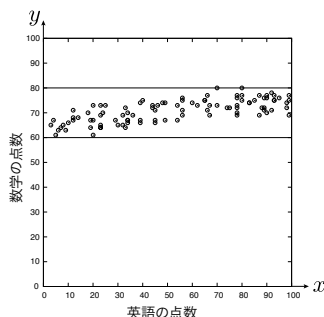


図 5

英語の点数 x と数学の点数 y から総合評価の点数 z を算出するとき，通常は単純に相加平均 $z = \frac{x+y}{2}$ を考えるだろう．相加平均の点数 z とは，図 6 のように，英語と数学の点数ベクトル $t = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を方向ベクトル $a = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ の直線に射影した内積 $t \cdot a$ の値 z に他ならない．

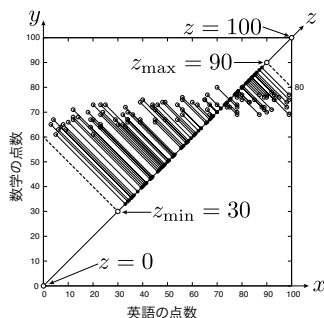


図 6

英語と数学の点数の動く範囲は $[0, 100]$, $[60, 80]$ なので， $z_{\min} = \begin{pmatrix} 0 \\ 60 \end{pmatrix} \cdot a$, $z_{\max} = \begin{pmatrix} 100 \\ 80 \end{pmatrix} \cdot a$ とおくと， $z_{\min} = 30$, $z_{\max} = 90$ となる．よって，相加平均の点数は高々幅 $\Delta z = z_{\max} - z_{\min} = 60$ の中に分布している．幅 60 点の中に 100 人がひしめいてしまった理由は，数学の点数が 20 点差の中に分布しているからで，数学の点数の幅が英語の 1 問分の点数になったことに起因している． Δz が小さいと順位の差が出にくい．例えば，点数ベクトルが $t_1 = \begin{pmatrix} 20 \\ 80 \end{pmatrix}$, $t_2 = \begin{pmatrix} 40 \\ 60 \end{pmatrix}$ の生徒たちは， $z_1 = z_2 = 50$ となって同順位となる．

点数をばらけさせて単独順位をなるべく増やすために，相加平均を一般化した重み付き平均 $z = (1-s)x + sy$ ($s \in [0, 1]$) を考える． $s = 0.5$ の場合が相加平均だ．重み付き平均の点数 z とは，点数ベクトル t を方向ベクトル $a = \begin{pmatrix} 1-s \\ s \end{pmatrix}$ の直線に射影した内積 $t \cdot a$ の値 z に他ならない．

例えば，数学の点数の幅は英語 1 問分だから， $s = \frac{1}{6}$ として，重み付き平均の点数を $z = \frac{5x+y}{6}$ とすると， $z_{\min} = 10$, $z_{\max} = 96.\bar{6}$, $\Delta z = 86.\bar{6}$ を得る．相加平均の点数に比べて Δz が格段に大きくなった．上述の相加平均 50 点だった t_1 , t_2 は， $z_1 = 30 < z_2 = 43.\bar{3}$ となり点数差が出る．

理論上 Δz を最大化するための s を求めよう．結論は $s = 0.097$ のとき $z_{\min} = 5.82$, $z_{\max} = 98.06$ となり，最大幅 $\Delta z = 92.24$ を得る．図 7 の z 軸は $s = 0.097$ のときの方向ベクトル a の直線だ．

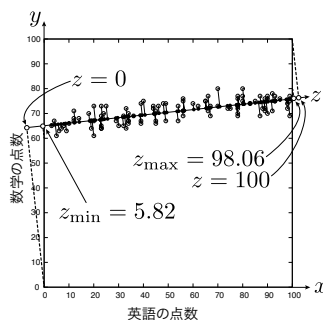


図 7

一般に， xy 座標平面上の散布図からデータの分

散を最大化する方向ベクトル $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ を求め、そこから総合特性値 $z = ax + by$ を定める方法を主成分分析という。以下にその方法の概略を示す。

n 個の散布図データ $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^n$ から、 x と y のそれぞれの分散と (x, y) の共分散をそれぞれ σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{xy} とする。すなわち、

$$\sigma_{xx} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2, \quad \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

$$\sigma_{yy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2, \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$$

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

である。分散共分散行列を $V = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} \end{pmatrix}$ と

し、 $z = ax + by$ の係数ベクトルを $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ とする。このとき、 $z = ax + by$ の分散 σ_{zz} は

$$\sigma_{zz} = {}^t \mathbf{a} V \mathbf{a} \quad ({}^t \mathbf{a} = (a, b))$$

と表される。

以下、条件 $|\mathbf{a}|^2 = 1$ のもと、分散 σ_{zz} を最大にする $\mathbf{a}$ を求めたい。そこで、2 変数関数

$$S(\mathbf{a}) = {}^t \mathbf{a} V \mathbf{a} - \lambda |\mathbf{a}|^2$$

に対する条件付き極値問題を考える (λ はラグランジュの乗数)。標準的に $\frac{\partial S}{\partial a} = 0$, $\frac{\partial S}{\partial b} = 0$ から、極値点の候補を洗い出すと、 $V \mathbf{a} = \lambda \mathbf{a}$ を得る。よって、非自明解は V の固有値と固有ベクトルに他ならない。固有値は、

$$\frac{1}{2} \left(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} \pm \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\sigma_{xy}^2} \right)$$

と算出できるので、相関係数を $r_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sqrt{\sigma_{xx}\sigma_{yy}}}$

とおくと、 $r_{xy}^2 \leq 1$ がわかり、

$$\begin{aligned} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})^2 - ((\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\sigma_{xy}^2) \\ = 4\sigma_{xx}\sigma_{yy}(1 - r_{xy}^2) \geq 0 \end{aligned}$$

より、固有値は非負となる。ゆえに、 V の固有値

λ_1, λ_2 は、 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq 0$ を満たし、 λ_1 に属する固有ベクトルを $\mathbf{a}_1$ とすると、分散 σ_{zz} は、 $\sigma_{zz} = {}^t \mathbf{a}_1 V \mathbf{a}_1 = \lambda_1$ のときに最大となる。

以上より、分散が十分に大きかったら、 $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$ として、 x と y の総合特性値として重み付き平均 $z = \alpha_1 x + \alpha_2 y$ が適切であることがわかる。

仮想テストの結果のような 100 点が満点の場合、 z の値も $[0, 100]$ の範囲であることがわかりやすい。そこで ($\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$ の場合)、 $s = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}$

とし、 $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1-s \\ s \end{pmatrix}$ とおくと、 $\mathbf{a}$ は固有ベクトル $\mathbf{a}_1$ と同方向で、重み付き平均 $z = (1-s)x + sy$ の動く範囲が $[0, 100]$ となる。上の仮想テストの結果データの場合 $\alpha_1 = 0.994$, $\alpha_2 = 0.107$, $t = 0.097$, $1-t = 0.903$ であった。 ($\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$ 以外の場合、 $z = \alpha_1 x + \alpha_2 y$ が負値となることもある。しかし適切に重み付けして原点移動すれば、動く範囲を $[0, 100]$ にすることができる。)

3. 汎関数の極値：等周問題

(大学 3, 4 年生に向けて)

1 変数関数、2 変数関数の極値と続いた。本節では、ジョルダン曲線がもたらす大域的量 (汎関数) の極値を扱う。次の素朴な問題を考えてみよう。

問題 牛乳パックの直方体の部分の容積は、一般に $7 \times 7 \times 19.4 = 950.6$ ml である。内容量 1000 ml は虚偽表示なのか (図 8)。

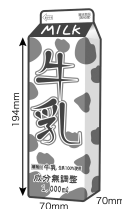


図 8

上の問題は等周問題と関連している。等周問題はジョルダン曲線に対して考える問題であるので、まずジョルダン曲線とその周辺について整理する。平面 $\mathbb{R}^2$ 上のジョルダン曲線を連続関数

$[0, 1] \ni u \mapsto \mathbf{x}(u) = \begin{pmatrix} x(u) \\ y(u) \end{pmatrix}$ とする. ただし単純閉曲線なので $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}(1)$ で, $[0, 1]$ 上で $\mathbf{x}$ は単射である. 以降, ジョルダン曲線 $\mathbf{x}$ の像を

$$\Gamma = \{\mathbf{x}(u) \in \mathbb{R}^2; u \in [0, 1]\}$$

と表し, Γ もジョルダン曲線と呼ぶことにする. また, Γ で囲まれた部分を Ω とし, Γ の正の方向を, u が増加する方向に Γ に沿って動いたとき, いつも左手に Ω を見る方向とする (図 9).

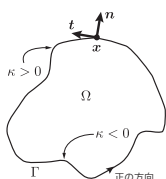


図 9

関数 $\mathbf{x}$ を連続微分可能とし, 局所長を $g(u) = |\mathbf{x}'(u)|$ とおく ($F' = \frac{dF}{du}$). $g > 0$ とき曲線 $\mathbf{x}$ は正則であるといい, 弧長 s を $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = g(u) du$ の不定積分から定める. 単調性 $s'(u) = g(u) > 0$ から u は s の関数となり, 正則曲線を $\bar{\mathbf{x}}(s) = \mathbf{x}(u(s))$ と表示できる. 逆関数の微分法から $\bar{\mathbf{x}}'(s) = \frac{\mathbf{x}'(u(s))}{g'(u(s))}$ となり, $|\bar{\mathbf{x}}'(s)| = 1$ を得る. すなわち, 弧長とは局所長が 1 となるパラメータである. 以後, 混乱しない限り $\bar{\mathbf{x}}$ も $\mathbf{x}$ と書き, 正則なジョルダン曲線 Γ を考える.

Γ の周長を L , Ω の面積を A とすると,

$$L = \int_0^1 g du = \int_{\Gamma} ds \quad \left(\int_0^L \text{を} \int_{\Gamma} \text{と書く} \right)$$

$$A = \frac{1}{2} \int_0^1 (\mathbf{x} \cdot \mathbf{n}) g du = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \mathbf{x} \cdot \mathbf{n} ds$$

となる. ここで, $\mathbf{n} = -\mathbf{t}^{\perp}$ は Γ の外向き単位法線ベクトル, $\mathbf{t} = g^{-1} \mathbf{x}'$ は Γ の単位接線ベクトル, $(a, b)^{\perp} = (-b, a)$ は反時計回りの 90 度回転である. したがって, $A = \frac{1}{2} \int_0^1 \mathbf{x}^{\perp} \cdot \mathbf{x}' du$ と書くこともできる. (後の変分計算にはこの形の方が使いやすい.) また, $\mathbf{x}$ が 2 階連続微分可能な場合は, 曲率が $\kappa = g^{-1} \mathbf{n}' \cdot \mathbf{t}$ と定義される (図 9).

ジョルダン曲線の周長と面積に関して次の問題が知られている.

等周問題 周長一定のジョルダン曲線の中で, 囲まれた面積が最大となる曲線は何か.

次の実験は等周問題の解を示唆するものである.

実験 針金で取っ手付きの輪を作る. 針金の枠よりも小さい輪を糸で作り取っ手に引っかける (2 つの輪は共にジョルダン曲線). それをバケツに満たした洗剤溶液 (水+台所用洗剤+洗濯糊かグリセリン) に浸す (図 10 (a)). そっと持ち上げると針金と糸の輪が全体にシャボン膜が張られる (図 10 (b)). そして, 糸の中に張った膜だけを (乾いた指でつついて) 割る (図 10 (c)).

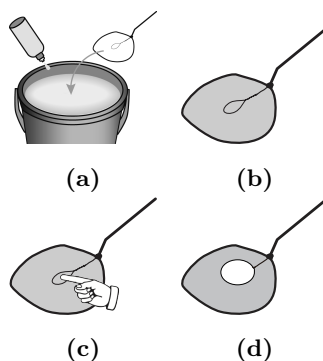


図 10

結果, 糸は円を描く (図 10 (d)). 糸と針金枠の間に張られた膜 ((d) の灰色部分) は, 表面張力によって最小面積になっているので, 相対的に糸で囲まれた (膜が無くなった) 部分の面積は最大化された. 糸の長さは変わらないから, 等周問題の解として円が得られることが実験的にわかった.

ジョルダン曲線 Γ を決めると周長 L と面積 A が決まるので, それぞれ Γ の汎関数として $L(\Gamma)$, $A(\Gamma)$ のように表す. さらに, 等周比 (isoperimetric ratio) と呼ばれる無次元量

$$I(\Gamma) = \frac{L(\Gamma)^2}{4\pi A(\Gamma)}$$

を導入する. このとき, 任意の Γ に対して次の不等式が成立することが知られている.

等周不等式 $I(\Gamma) \geq 1$ (等号は Γ が円のとくに限る)

Γ が半径 r の円のときは, $L(\Gamma) = 2\pi r$, $A(\Gamma) = \pi r^2$ から $I(\Gamma) = 1$ である. 例えば, Γ が単位正方形のとき, $I(\Gamma) = \frac{4}{\pi} > 1$ となる. 等周不等式は, Γ が円でないことと $I(\Gamma) > 1$ は同値であるという主張である. $I(\Gamma) = 1$ が停留値となることは以下の変分計算から確認できる (Γ を C^2 級とする). $\varepsilon > 0$ とし, Γ を微小変形したジョルダン曲線 Γ_ε を次式のように与える.

$$\Gamma_\varepsilon = \{\mathbf{x}(u) + \varepsilon \mathbf{z}(u) \in \mathbb{R}^2; u \in [0, 1]\}$$

形式的に $L'(\Gamma) = \left. \frac{d}{d\varepsilon} L(\Gamma_\varepsilon) \right|_{\varepsilon=0}$ などと書くと,

$$L'(\Gamma) = \int_{\Gamma} \kappa(\mathbf{z} \cdot \mathbf{n}) ds, \quad A'(\Gamma) = \int_{\Gamma} \mathbf{z} \cdot \mathbf{n} ds$$

を得る. よって, $\mathbf{z} = p\mathbf{n} + q\mathbf{t}$ と分解したとき, 接線 $\mathbf{t}$ 方向への Γ の変形は上の変分計算には関係ないことがわかるので, はじめから曲線を法線方向 $\mathbf{z} = p\mathbf{n}$ にのみ微小変形するとしてよい. このとき, 等周比に対して変分計算すると,

$$I'(\Gamma) = \frac{L}{2\pi A} \int_{\Gamma} \left(\kappa - \frac{L}{2A} \right) p ds$$

$$\left(L'(\Gamma) = \int_{\Gamma} \kappa p ds, \quad A'(\Gamma) = \int_{\Gamma} p ds \right)$$

となる. $p(u)$ は任意で $I'(\Gamma) = 0$ より, 変分法の基本補題から, Γ は $\kappa \equiv \frac{L}{2A}$ の曲線, すなわち円だから, $I(\Gamma) = 1$ は停留値であることがわかる.

等周不等式の成立を認めると, 周長 $L(\Gamma)$ を一定としたとき, 面積 $A(\Gamma)$ の最大化と等周比 $I(\Gamma)$ の最小化は同値である. 最小値は $I(\Gamma) = 1$ であり, それを達成する Γ は円に限るから, 等周問題は等周不等式から導かれる. 等周問題や等周不等式の証明は, Hurwitz によるフーリエ級数を用いた証明, Steiner による対称化の方法などさまざま知られている^{1, 2)}. 本稿では次節で古典的曲率流方程式を用いた証明³⁾を紹介しよう.

さて, 等周問題が解決すると, 冒頭の紙パックの問題に回答できる. 店で図 8 の形状の飲料を購入するとき, 紙パックは膨らんでいるだろう. 上から見ると正方形の紙パック (図 11 (a)) が, 図 11 (b) のように膨らんでいる.

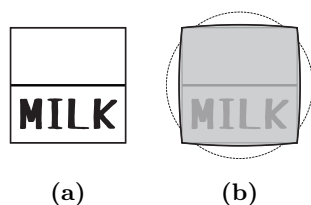


図 11

紙は伸びないので等周問題の解を適用できる. 正方形よりも円 (点線) の方が面積は大きい, 実際は円までは変形せず, 多少丸く膨らむくらいであるが, それでも面積は増加する. 実際, 図 11 (b) の閉曲線は, 牛乳パックの正方形の底面の周長の 4 分の 1 と同じ長さの中心角 90 度の楕円弧を 4 つ組み合わせたものである. 灰色部分の面積は正方形の面積と大きく変わらないように見えるが 6.6% 増えている. 牛乳パックの直方体の部分の高さ 19.4 cm を, 単純に, 灰色部分を底面とした柱の高さを h , 直方体の部分の高さを $19.4 \text{ cm} - h$ と分けると, $h = 15.2 \text{ cm}$ とすれば容積は 1000 ml となる. つまり, 牛乳パックの直方体の高さの 78% が図 11 (b) の程度に膨れれば, 内容量 1000 ml と記載できることがわかる.

4. 極小値に向けて動く曲線と等周問題の解

(大学 4 年生, 大学院生に向けて)

時々刻々と変形するジョルダン曲線を

$$\Gamma(t) = \{\mathbf{x}(u, t) \in \mathbb{R}^2; u \in [0, 1]\}, \quad t \in [0, T]$$

とする. 前節の Γ_ε において, ε を時間 t とみたと, p は時刻 0 における $\Gamma(t)$ の法線速度 $V(u, 0) = \partial_t \mathbf{x}(u, 0) \cdot \mathbf{n}(u, 0)$ に等しいから, Γ 上の内積を $(a, b) = \int_{\Gamma} ab ds$ とし,

$$L'(\Gamma(0)) = \int_{\Gamma(0)} \kappa V ds = (\kappa, V)$$

を得る. シュワルツの不等式と相加平均相乗平均の不等式より, ノルムを $\|a\| = \sqrt{(a, a)}$ とし,

$$|(\kappa, V)| \leq \|\kappa\| \|V\| \leq \frac{\|\kappa\|^2 + \|V\|^2}{2}$$

と評価できる. 2 つの不等式の等号が成立するよ

うに正規化すると、その条件は $V = c\kappa$ (c は定数) と $\|V\| = \|\kappa\|$ であるから、 (κ, V) は $V = -\kappa$ のとき最小値 $-\|\kappa\|^2$ をとる。各時刻 $t > 0$ においても同様に考えれば、方程式 $V(u, t) = -\kappa(u, t)$ は、周長 $L(\Gamma(t))$ を内積 $(\cdot, \cdot)$ を用いた計量により最も大きく減らす成長法則を与える。その意味で $V = -\kappa$ は曲線短縮方程式と呼ばれる。

一般に、法線速度 V を κ や κ の導関数、あるいは $\mathbf{n}$, L , A などの関数として与えて $\Gamma(t)$ の形状を決定する問題を移動境界問題と呼ぶ⁴⁾。方程式 $V = -\kappa$ の解析が当該分野の嚆矢となったことから、 $V = -\kappa$ は古典的曲率流方程式とも呼ばれる。

$\Gamma(t)$ を $\Gamma(0) = \Gamma_0$ を滑らかな初期ジョルダン曲線とする $V = -\kappa$ の解曲線とし、 $L(t)$ と $A(t)$ を $\Gamma(t)$ の周長と囲む面積とする。 $\Gamma(t)$ は、変形の途中で特異点を発生せずに徐々に凸になり有限時間で 1 点に消滅することが知られている (図 12)。



図 12

$\mathbf{n}$ の偏角を θ とすると、曲率は $\kappa = g^{-1}\theta'$ があるので、面積の時間変化 $\frac{dA}{dt}(t) = A'(\Gamma(t))$ に $V = -\kappa$ を代入して、

$$\frac{dA}{dt} = - \int_{\Gamma(t)} \kappa ds = - \int_0^1 \theta' du = -2\pi$$

から、 $A(t) = A_0 - 2\pi t$ を得て ($A(0) = A_0$)、 $\Gamma(t)$ の消滅時刻 $T_* = \frac{A_0}{2\pi}$ を得る。

以上の準備のもと、 $L(0) = L_0$ として等周不等式 $L_0^2 \geq 4\pi A_0$ を示そう。まず上式から、

$$4\pi \frac{dA}{dt} = -2 \left(\int_{\Gamma(t)} \kappa ds \right)^2 \quad (1)$$

である。右辺の 2 乗の項にシュワルツの不等式を用いると、周長の時間変化 $\frac{dL}{dt}(t) = L'(\Gamma(t))$ に $V = -\kappa$ を代入して、

$$\left(\int_{\Gamma(t)} \kappa ds \right)^2 \leq L \int_{\Gamma(t)} \kappa^2 ds = -L \frac{dL}{dt}$$

となる。これを (1) の右辺に代入し、両辺を $[0, T_*]$

で積分すると、1 点消滅の結果 $L(T_*) = A(T_*) = 0$ を使って、 $-4\pi A_0 \geq -L_0^2$ から等周不等式を得る。等号成立はシュワルツの不等式で等号成立するときで、それは曲率 κ が $(0, T_*)$ で一定、すなわち $\Gamma(t)$ が円のときである。よって Γ_0 も円となり、等周不等式が完結する。

$\Gamma(t)$ の等周比を $I(t) = \frac{L(t)^2}{4\pi A(t)}$ とおくと、

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{L}{2\pi A} \left(\int_{\Gamma(t)} \kappa^2 ds - \pi \frac{L}{A} \right)$$

がわかる。ここで $\Gamma(t)$ が凸曲線のとき上式の括弧内は非負値をとることが知られている (ゲージの不等式)。よって、 $V = -\kappa$ の解曲線は変形の途中で凸になるので、等周比は極小値 $I = 1$ に向かって減少する。このことは、図 12 からも示唆されるが、解曲線 $\Gamma(t)$ は円に漸近しつつ時刻 T_* で 1 点に縮退することがわかっている。

3 節と 4 節は駆け足だった。拙著⁶⁾を参照されたい。

参考文献

- 1) 浦川肇, 「等周不等式」, 『数理科学』 **386** (1995) 20–24.
- 2) 小林昭七, 『円の数学』, 裳華房, 1999.
- 3) 儀我美一, 「界面ダイナミクス: 曲率の効果」, 増田久弥 (編集) 『応用解析ハンドブック』, 丸善出版, 2012.
- 4) 木村正人, 「境界追跡法による移動境界問題の数値解析」, 『数理科学』 **417** (1998) 42–47.
- 5) 矢崎成俊, 『実験数学読本』, 日本評論社, 2016.
- 6) 矢崎成俊, 『界面現象と曲線の微積分』, 共立出版, 2016.

(やざぎ・しげとし, 明治大学)