●読み物

中高生たちと楽しむ実験数楽［下］*1

矢崎成俊

休憩を終えた実験数楽者の周布岳(すふ・たける)は，講演前半のまとめの図1が映し出されたスクリーンを見ながら，大講堂の壇上に戻ってきた．聴衆の中学・高校の生徒たちも席に戻ってきたようだ．実験アシスタントの中学3年生，井上大智(いのうえ・だいち)くんは，すでに壇上の机に座って，机の上の実験道具をいじりながら後半のスタートを待っている．

講演前半のまとめ

心得 1. 考えることを放棄しない
【実験 1】 最後はみんな……
【実験 2】 123456707654321 の素因数分解
【実験 3】 雲をつくる
心得 2. コンピュータは人が使うもの
【実験 4】 表計算ソフトで 0.1 を 100 回足す
【実験 5】 畳を敷き詰められるか？

図 1 講演前半(『数学文化』37 号特集記事，同タイトル［上］)のまとめ

◎―心得 3．思い込みをしていないか？　自問する

講演後半を始めましょう，と岳は言って図2を見せた．

【とんち実験 6】 普通でない道路標識

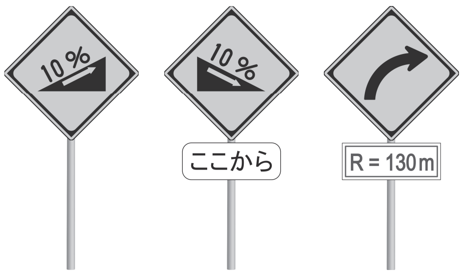


図 2 通常の道路標識

「図2は，通常の道路標識ですよね．みんなはまだ運転免許もっていないから，ピンとこないかもしれませんが，想像はつくでしょう．そこで問題です．図3の(ア)，(イ)，(ウ)，(エ)に入る適切な言葉や記号は何でしょうか？　正解がある

＊1　本稿は，2019 年 11 月 30 日に清真学園高等学校・中学校の清真学園 SSH 科学講演会における講演「いかにして困難な問題に立ち向かうか.」の発表スライドを修正・加筆したもので，『数学文化』37 号特集記事，同タイトル［上］の続編です．

ような問題ではないです．クイズというか，とんちです．面白い回答を考えてください」

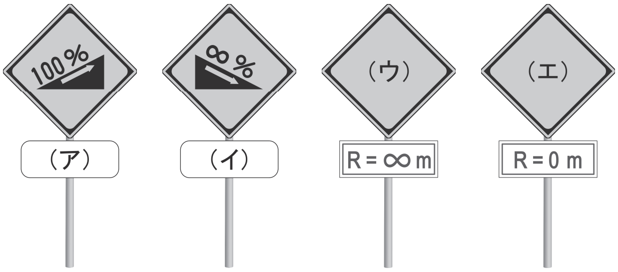


図 3　（ア），（イ），（ウ），（エ）

——（ア）について 登坂不能 や これまで など，（イ）について 転落注意 や 断崖絶壁 などはどうだろう．坂道の百分率は，例えば 100 m 進んだときに 10 m 上がったら 10% と計算される．つまり，坂道の角度を θ（ラジアン）とすると，100 tan θ % である．ところが，100% といわれると，目一杯の坂，すなわち壁が立ちはだかっていると思い込む．（ただ，100% は 45° の坂を意味し，普通車は登ることができないので実質上は壁である．）

——（ウ）について ↰ や ↱，（エ）について ↑ や ↓ はいかがだろうか．R は道路の中心線の曲率半径，すなわち中心線に 2 次の接触をする円（曲率円）の半径である．$R=\infty$ は，曲率円の半径を究極に無限大にした道路の中心線だから，道路の中心線が曲がっていない場合，つまり真っ直ぐな道路に相当する．一方，$R=0$ は，曲率円の半径を究極に 0 にした道路の中心線だから，直角に曲がっている中心線，つまり左折か右折に相当する．

——大智も聴衆もみな口々にいろんなアイディアを言っていたが，総じて 100% の響きにだまされたようだった．その様子を見て，岳は心得 3 の核心を突く次の実験に移った．

【実験 7】　350 ml 缶の斜め立て

「大智くん．机の上にある 350 ml 缶を斜めに立ててください．中には液体が入っています——ビールじゃないですよ．もう飲みましたから——，こぼさないように気をつけてください．うまく立たなかったら，そこのコップに液体を出して，量を調節してください」

聴衆はそもそも缶って斜めに立つのだっけ？ というところから疑問をもったようで，少しざわつきながら，大智の慎重な操作を見守っている．

「やった．立った！」

ぶっつけ本番の実験なので，大智も半信半疑だったが，見事に 350 ml 缶を立てた．

「みんな拍手!!」と岳は促して，では大智くん，今度は 500 ml 缶でやってみましょうと続けた．

図 4　【実験 7 の結果】350 ml 缶は（液体を適量入れて）斜めに立つ

【実験 8】 500 ml 缶の斜め立て

「立ちました！」

大智は要領を得たようで，今度は楽に立たせることができた．出来ると簡単に見えるものだが，500 ml 缶を立たせるには紆余曲折があった…….

図 5　斜めに立つ 500 ml の空き缶もある

——岳の実験室には 500 ml 缶がたくさんある．いろいろと試したが 500 ml 缶が斜めに立ったことはなかった．あるときまで．そもそも，500 ml 缶は斜めに立たないという記事をどこかで読んだせいもあって，最初から立たないと決めつけて，立たせようという気がなかったのかもしれない．ところがあるとき，小学生相手の実験教室で，缶の斜め立ての実験をした．小学生は出来ないなどと思い込むこともなく，失敗して倒れて缶の中の液体がこぼれてもへっちゃらで，次から次へと缶を斜めに立てようと無邪気に遊んでいた．そしたら，できたよ！ と，チェコビールの 500 ml 缶で成功した．

一度成功すると，今度は出来るんだという思考になって，斜め立ち出来るものも結構見つかった．どうやら，500 ml 缶は，底の形状が 2 種類ほどあるらしいことがわかってきたのだった．“思い込み，先入観”があったせいで，成功しないこと前提でどれも一緒だろうと高をくくり，1 種類の 500 ml 缶でしか実験していなかった．しかし，一度成功すると“信念”が生まれ，今度は，成功すること前提で，どれも違うだろうと疑いの目をもって，いろんな缶で実験して，つぎつぎ成功したわけである．

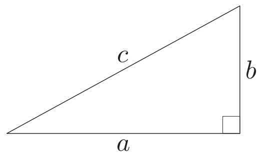


図 6　ピタゴラスの定理 $c^2 = a^2 + b^2$

思い込みや先入観の打破，前例のないことへの挑戦は，缶の斜め立てに限らない．どんな問題でも，初めて解決するのは大変である．登山でいえば，未踏峰への初登頂は困難であるが，一度誰かが登頂すると，異なる登頂ルートがつぎつぎ見つかるのと同じで，数学の問題にしても，一度誰かが証明すると，つぎつぎと別の解決法が見つかることは非常に多い．例えば，有名なピタゴラスの定理(図 6)の証明は数百もあると言われている．

岳はそんな想いをみなにぶつけ，ちょっと脱線するが，ピタゴラスの定理の面白い応用例として，ルービックキューブに関する次のクイズを出題した．

【実験 9】 ルービックキューブ 6×6 と 7×7 の差

「大智くん，机の上に大小さまざまなルービックキューブが置いてあります．2×2，3×3，……，一番大きいのは 8×8 かな？ 書画カメラを使って，みんなに全部見えるように並べてください．2×2 から 8×8 に向かって，段々とブロックが細かくなっていきますが，途中で変わった特徴がみられます．何だかわかりますか」

「はい．6×6 まではブロックは全部正方形の面が見えているのですが，7×7 と 8×8 は，長方形の面が出てきます．実は，これは前から気になっていて，何でだろうと思っていました」

聴衆の中には，大智の意見に賛同して頷いている者もいる．

「では，ピタゴラスの定理を使って，その謎を解き明かしましょう．一つのブ

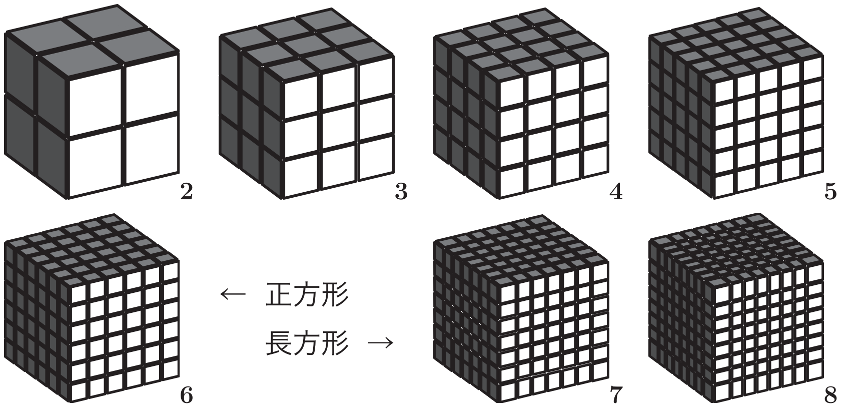


図 7　ルービックキューブ：2×2 から 8×8

ロックが一辺の長さ 1 の立方体の $n\times n$ のルービックキューブを考えましょう．ルービックキューブは図 8 のように動かしますね．――大智くん，8×8 のルービックキューブの一番外側の面を 45° 回転させて，真横から書画カメラで映してください」

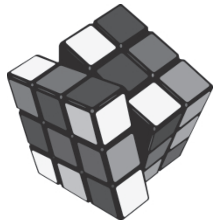


図 8　ルービックキューブを動かす

大智は，言われた通り 45° 回転させて，みなに見せた．ちょうど図 9 のような状況である．

図 9 は $n\times n$ のルービックキューブの場合である．一辺 n の正方形を 45° 回転させると，ピタゴラスの定理から正方形の半分の直角三角形の高さは $\dfrac{n}{\sqrt{2}}$ である．一方，45° 回転した 1 ブロックの高さも，ピタゴラスの定理から $\sqrt{2}$ で，正方形の高さは $\dfrac{n}{2}$ である．よって，“1 ブロックがポロッと落ちない”ためには，$\dfrac{n}{\sqrt{2}}$ が $\sqrt{2}$ と $\dfrac{n}{2}$ の和よりも小さくなければならない．これより，次がわかる．

$$\frac{n}{\sqrt{2}} < \sqrt{2}+\frac{n}{2} \iff n < 4+2\sqrt{2} = 6.8284\cdots$$

よって，$n\times n$ のルービックキューブのすべてのブロックが立方体でいられるのは，$n=6$ までであることが証明された．

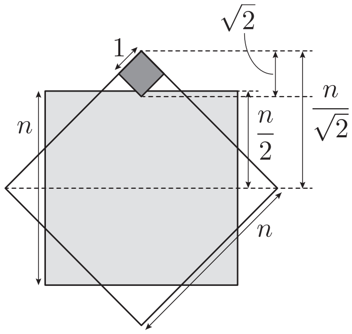


図 9　$n\times n$ のルービックキューブを横から見て，一番外側の面を 45° 回転させた

――思い込みや先入観というのは，実感が伴わないと打破するのはなかなか難しい．いや，実証したとしても，頭では理解できたとしても，心情を打破できないのが人間である．有理数だけを数と言っていたピタゴラス教団の中にいて，正方形の対角線の長さが有理数ではないことを見いだしたヒッパソスの心境を想像するとゾッとする．星々は地球を中心に回っていると信じられていた世の中で，地球は自転しながらが公転しているなんてことを観測データから科学的に帰納してしまった人たちの心境は，世間が知らない真実を見いだした喜びだったのか，パンドラの箱を開けてしまった後悔だったのか……．思い込みや先入観というのは，経験を積むほどやっかいに人に付きまとうものである．だから，それを打破する方法を一つ知っておくだけでも，少し知恵が付いたと言えるのではないだろうか．岳はそんな気持ちを込めて，次は思い込みや先入観を打破する方法を考え

よう，と言って話を先に進めた．

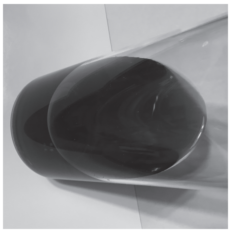
◎—心得 4．逆さまに考える

【実験 10】　楕円の切り口

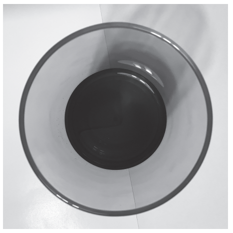
「机の上に円柱の透明な容器があります．大智くん，書画カメラでみんなに見せてください．——この円柱を斜めに切ったとき，その切り口はどんな図形になるでしょうか？」

楕円……でしたでしょうか，と大智は答えた．楕円の解析幾何的な定義と性質は高校数学で登場するが，中学生でも楕円という言葉は知っているようだ．

「そうですね！ 容器を実際に切るのは難しいから，中に紅茶を入れて，容器を少し傾けてください．そうすると紅茶の水面が切り口になります．水面を書画カメラでみんなに見せてください(図 10(ａ))．これが楕円です．容器を真っ直ぐに立てると水面は円になります(図 10(ｂ))．これは円柱を真横に切ったことに相当します」



(a)



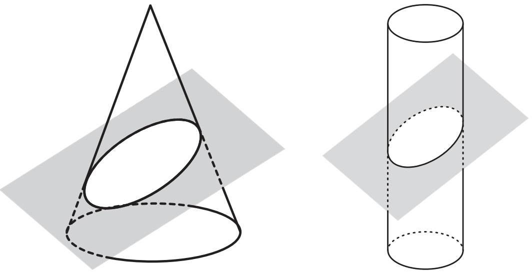
(b)

図 10　円柱を斜めに切った切り口は紅茶の水面

会場のみんなも，うんうんと頷いている．

「さてそこで……，逆さまに考えよう．切り口が楕円になるような立体は何でしょうか．会場のみなさんも，知っていたら，言ってください．円柱の他にもあるかな」

円錐！ と元気な声があがった．円錐曲線については高校数学で学ぶから，その通りですね！ 高校生かな？ と岳が聞いたら，その生徒は，はい，と首肯した．ありがとう，と岳は言って図を見せた(図 11(ａ))．



(a)　(b)

図 11　円錐や円柱を斜めに切る

「円柱の切り口は楕円でした(図 11(ｂ))．ならば円錐の切り口は，下の方がもう少し広がった卵形のような下ぶくれの楕円になると思いきや，こちらも楕円なのです．なんか不思議ですよね．でも紀元前にアプロニウスという哲学者が証明しました．——他にもありますかぁ」

他にもあるのか？ なんだなんだ，と会場はざわついたが，なかなか結論がでないようだった．少し待って，岳が，大智くん，机の上のぼくの印鑑を書画カメラで映してください，と言った．

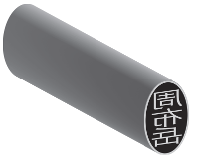
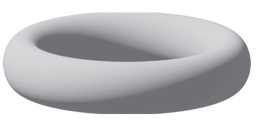


図 12　印鑑

「みなさん，もし図 12 の印鑑が楕円柱だったら……」

アッと大智が言った．真横に切ったら楕円柱です．

「そうですよね．この方針でいけば，切り口が楕円になるようなものをつくればよいのだから，例えば，図 13 みたいな，楕円をぐるっと回してつくったドーナツでもよいわけですね．ちょっとずるかった？」



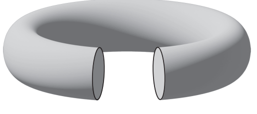


図 13　楕円をぐるっと回してつくったドーナツ

会場のみんなは，まぁそう言われればそうだけど……，といった顔をしている．岳は続けた．

「——ここで言いたかったことは，円柱の切り口は楕円ですが，切り口が楕円になるものは何だろうという，逆さまに考えるという思考方法はとても重要なん

だということです．いま見てきた例のように，『切り口が楕円になるものは何だ』と聞いて，円柱と答えさせたくてもすんなりとは答えられない可能性が非常に大きい．もっと言うと，質問者が答えは円柱しかないと思い込んでいたとしたら，逆さまに考えることによって，その思い込みを打破することができたわけです．——別の例を見てみましょう」

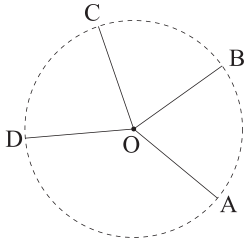


図 14　OA＝OB＝OC＝OD＝……

【思考実験 11】　1 点からの距離が等しい点の集まり

岳はこう言って，図 14 を見せた．

「円は 1 点からの距離が等しい点の集まりですね．——では逆さまに考えよう．1 点からの距離が等しい点の集まりは？」

そりゃ円しかないでしょう，という空気が会場に漂っている．——そんななか，球です！ という声が飛んできた．

「やったぁ！ その通りです．ありがとう．円しかないだろうと考えた人は，問われているのは平面の図形だと思い込んでいたわけです．逆さまに考えることによって，平面内の話だという無意識の先入観があぶりだされました．

——では，今度は平面に限りましょう．円はどこで測っても幅が等しい平面図形です．逆さまに考えよう．どこで測っても幅が等しい平面図形は何でしょうか？」

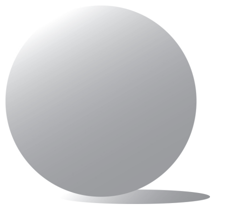


図 15　球

【実験 12】　ルーローの三角形

これは知らないと答えられそうもないので，岳は先に答えを図示した(図 16)．

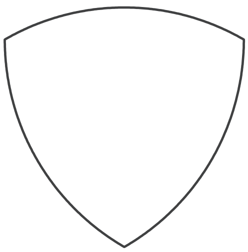


図 16　Reuleaux の三角形

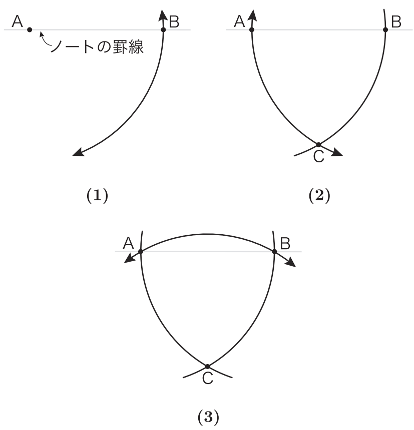


図 17　Reuleaux の三角形の描き方

「これは考案者の名前をとってルーローの三角形といいます．大智くん，机の上の紙にルーローの三角形を描いてもらえますか？ 手順はいまから言いますね」と岳は言って，大智の描く速度に合わせて，次の手順を言った(図 17)．

（1）　紙に適当に直線を引いて，その直線上に点 A をとって，コンパスで点 A を中心に適当な半径 AB の円弧を描く．

（2）　点 B を中心に半径 AB の円弧を描いて，先の円弧との交点を C とする．

（3）　点 C を中心に円弧 AB を描く．

この描き方から，図 18 のように，どこで測っても幅は変わらないことがわかる．このような曲線を定幅曲線という．

これより，円は定幅曲線であるが，定幅曲線は円に限らないことがわか

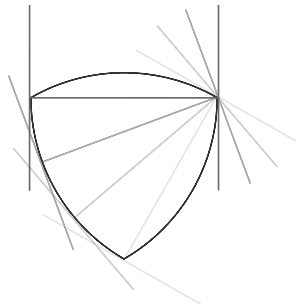
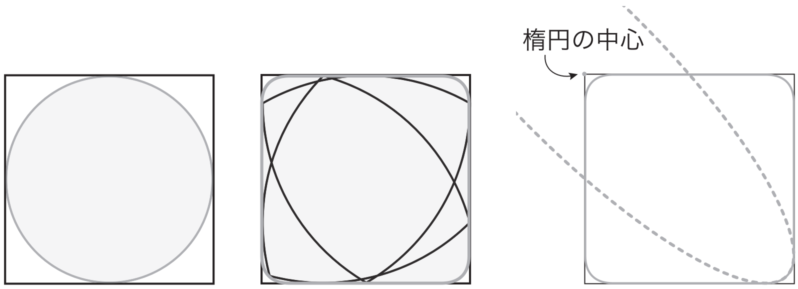


図 18　Reuleaux の三角形は等幅

った．ルーローの三角形の面白いところは，単に定幅であるということだけではない．ルーローの三角形の幅を一辺の長さとする正方形を考える．その正方形に含まれる最大の円は，正方形の一辺を直径とする内接円である(図 19 (a))．一方，ルーローの三角形は同じ正方形の中で回転することができて，回転したときにルーローの三角形が掃いた部分は図 19(b)のように正方形に内接する角が丸くなった四角形である．内接円は正方形の約 78.5% の面積を占めるが，ルーローの三角形が動き回った丸い四角形は正方形の約 98.8% もの面積を占める．なお丸い角は，図 19(c)のような楕円の一部である．



(a) (b) (c)

図 19　Reuleaux の三角形が掃く面積

図 20
パナソニック RULO mini

「つまり，ルーローの三角形でドリルを作ったらほぼ正方形の穴を開けることができるわけです．また，正方形の隅のぎりぎりまで届くので，ロボット掃除機に応用されています」と岳は言って，最新の掃除機の写真を見せた(図 20)．

ルーローの三角形の作り方を考えると，定幅曲線はどんな正多角形でも出来そうだが，奇数角形でないと定幅にならない．工業製品ではないが，イギリスの硬貨の 20 ペンスと 50 ペンスは，ルーローの七角形の形をしている(図 21)．

いずれにしても，逆さまに考えて，円と答えさせるのはなかなか難しいことがわかった．

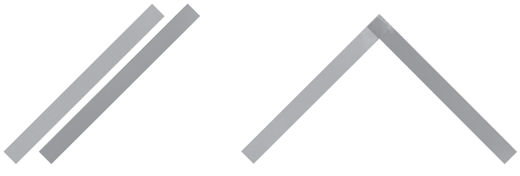
図 21　イギリスの硬貨．
20 ペンスと 50 ペンス

【実験 13】　内角の和は 180°

「逆さまに考えよう，の最後の問題にまいりましょう．三角形の内角の和は 180° ですね．では，逆さまに考えよう．内角の和が 180° の多角形は何でしょうか？」

そりゃさすがに三角形だけじゃない？

などという声が会場から聞こえてくる．



(a) (b)

図 22　画用紙の帯 2 本

「次の実験をしてみましょう．大智くんお願いします．机の上に画用紙でつくった帯が 2 本あります(図 22(a))．2 本の端と端を直角になるようにセロハンテープで貼ってください」

はい．できました，と大智は言って図 22(b)を見せた．ではもう片方の端と端も直角になるように貼ってください，と岳．

なんか眼みたいになりました，と大智は図 23 のような帯を見せた．

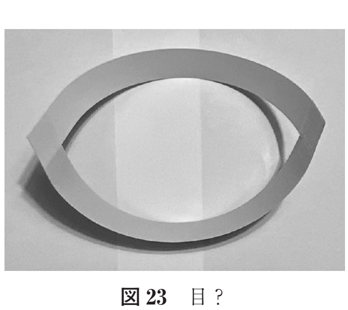


図 23　目？

「この帯の立体図形は何でしょうか」

「眼の左端を北極，右端を南極に見立てて，縦におくと，2本の帯が，図24のように地球上で2本の子午線になっているように見えませんか．これを球面2角形といいます．この場合の球面2角形の内角の和は $90^\circ \times 2 = 180^\circ$ です．

——逆さまに考えて，円と答えさせたり，三角形と答えさせたり，自分が望んでいる答えを引き出すには前提の共有が必要だということがわかりました．『心得4．逆さまに考える』と，自分の思い込み，先入観，あるいは暗黙の仮定がいぶりだされます．そして，世界が広がります．相手の立場に立って考える，ことでもあります．このような考え方は異文化の人と対話するときに必ず役に立ちます．自分の当たり前は通用しないのですから」

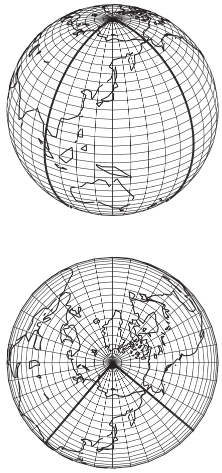


図24　2本の子午線

◎―心得5．論理と有用性を認め，可視化で納得する

岳は次の話題に移った．負数の概念は紀元前にその萌芽が見られ，紀元後も財産は正数，借金は負数のような使われ方で，その概念自体は一部の地域では浸透していたようであるが，現在のように負数が全世界の誰もに違和感なく，少なくとも数学的に問題がない形で受け入れられるようになるまでには相当の時間がかかった．時間を要した理由は，負数を何もない0よりも小さい数であると捉えるとわかりやすいだろう．負数でさえなかなか受容されなかったのだから，ましてや2乗して負数になる数——虚数——がすんなりと認知されるはずもない．そういった意味で，16世紀イタリアは，負数の受容や虚数の認容に向けた萌芽的な時期に差しかかっていた．当時，イタリアの先端数学者たちは，3次方程式の解法を巡ってしのぎを削っていた．

話題の中心的な人物はカルダーノであり，3次方程式 $x^3+3px = 2q$ の解は，カルダーノの解法により，

$$x = \sqrt[3]{q+\sqrt{q^2+p^3}}+\sqrt[3]{q-\sqrt{q^2+p^3}}$$

となることがわかっていた．例えば，$p = 1$，$q = 7$ の場合，$x^3+3x = 14$ の解は，

$$x = \sqrt[3]{7+\sqrt{50}}+\sqrt[3]{7-\sqrt{50}}$$

となる．ここで $7-\sqrt{50}$ は「嫌な」負数であるが，それに目をつむれば，$(1\pm\sqrt{2})^3 = 7\pm\sqrt{50}$ であるから，実数解 $x = (1+\sqrt{2})+(1-\sqrt{2}) = 2$ を得る．他にも2つの虚数解 $-1\pm\sqrt{-6}$ があるが，これらは当然棄却する．

唯一の実数解 $x = 2$ を得るために，論理的に構築された(信じるべき)解法の途中で負数が顔を出すことを，受容せざるを得なくなった．つまり，負数のもつ(無よりも小さいという)感覚的な気持ち悪さよりも，論理的な気持ち良さが選択された．

さらに虚数 $\sqrt{-1}$ は2乗すると負数になる数であり，負数以上にわけがわからない．例えば $p = -2$，$q = 2$ の場合を考えてみよう．3次方程式は $x^3-6x = 4$ となる(細かいことをいうと，負数は嫌なのだから，$x^3 = 6x+4$ と書くべきだろうが現代的に表記する)．このとき，

$$x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-4}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-4}}$$

という解を得る．ここでわけのわからないもの $\sqrt{-1}$ を記号のように扱えば，$(-1\pm\sqrt{-1})^3=2\pm\sqrt{-4}$ であるから，実数解 $x=(-1+\sqrt{-1})+(-1-\sqrt{-1})=-2$ を得る．他にも実数解 $1\pm\sqrt{3}$ があり，3 つの解がすべて実数でもこの「もの」は登場する．以上の結果，論理的に正当で有用な解法を認めることにより，その「もの」を無視できなくなった．だからといってすぐに虚数が認容されたわけではないが，少なくとも教科書に書いてあるような数の拡大がなされた，つまり $x^2=-1$ に解が欲しいから虚数を導入したのではない．

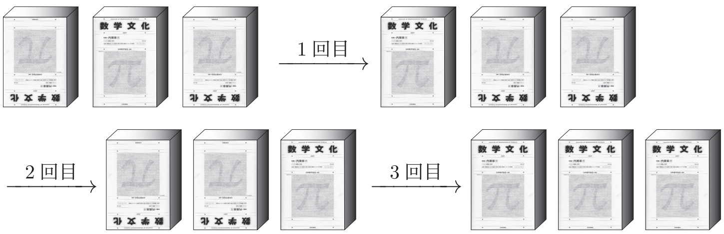
何もない 0 よりも小さいものである負数の存在は，数直線を使った可視化により納得できる．では「虚数」$i=\sqrt{-1}$ はどのように納得できるだろうか．実験してみよう．

【実験 14】　回転実験

「大智くん，机の上に箱が三つ，図 25 のように配置されています．このうちどれか 2 箱を同時に上下をひっくり返します．3 回ひっくり返して，三つの箱をすべて上向きにしてください」

図 25　下上下

大智は，考えながら次のように動かして，出来ましたと言った．



「いいですね．では図 26 のような配置だとどうでしょう．今度は何回動かしてもよいです」

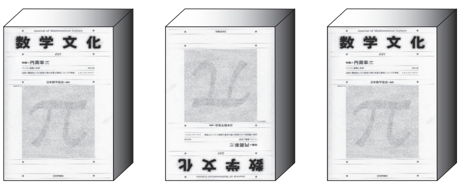
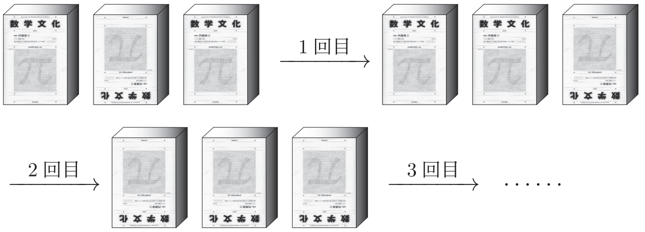
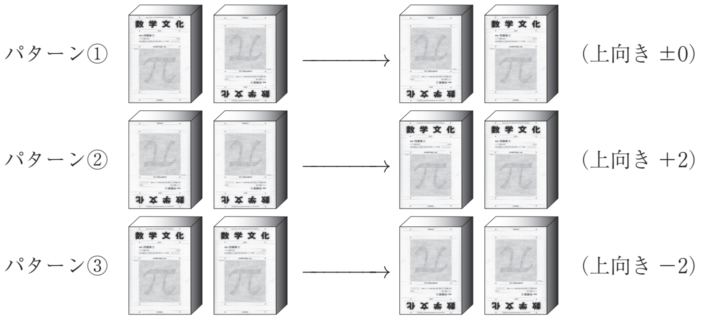


図 26　上下上

大智は，次のように動かして……，途中で出来そうもありませんと言った．



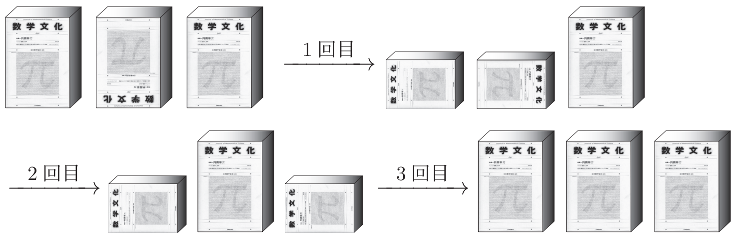
「はい．出来なさそうな雰囲気ですよね．実際できません」



動かし方のパターンを整理すると，上の三つになる．どのパターンであっても，上向きの箱の数は偶数個の増減である．だから，下向きの箱が奇数個あった場合，下向きの箱の個数を 0 にすることはできない．奇数足す偶数は偶数(0)にならないからである．

「ひっくり返す操作は 180° 回転です．今度はひっくり返す途中の横倒し操作を導入しましょう．ラベル側から箱を見て，反時計回りに左横倒しするときは 90° 回転，時計回りに右横倒しするときは −90° 回転とします．さて，大智くん，二つの箱を同時にに同じ方向に横倒しするとして，さっき出来なかった図 26 の上下上配置から，全部上向きに出来るでしょうか」

大智は，慎重に次のように動かして，出来ましたと言った．



「お見事です．みんな拍手 !! 」

上向きを $+1$，下向きを -1 とすると，ひっくり返す操作，すなわち 180° 回転操作は -1 倍することに相当する．横倒し操作はその中間の 90° 回転操作になって，左横倒し操作の 2 回繰り返しは 2 連続 90° 回転で -1 倍，右横倒し操作を 2 回繰り返すは 2 連続 −90° 回転で -1 倍となる．仮に 90° 回転を i 倍，−90° 回転を $-i$ 倍とすると，2 連続横倒し操作は $i^2=-1$，$(-i)^2=-1$ という計算に相当する．図 27 はこの操作を図示したものである．

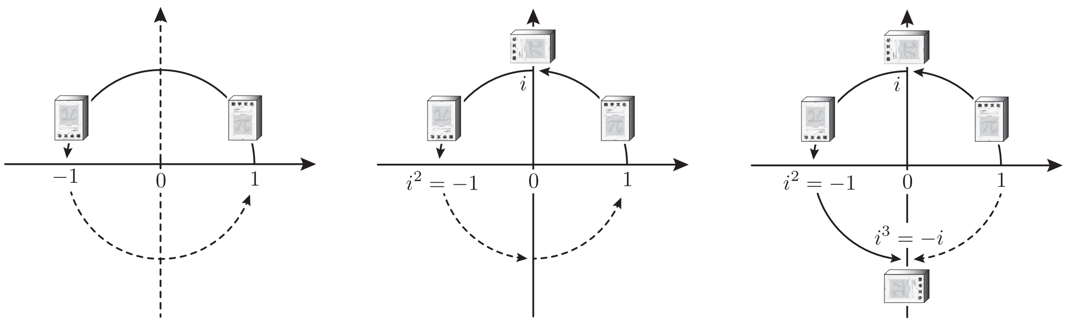


図 27　（a）−1 倍，（b）−1 倍は i^2 倍，（c）i^3 倍は $-i$ 倍

90° 回転導入でうまくいく理由(証明)は，図 28 の拙著をご覧いただきたい．

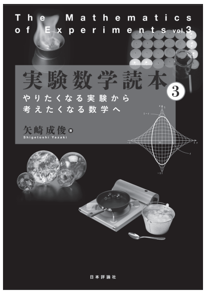


図 28　拙著『実験数学読本 3』日本評論社，2020

図 27 からわかるように，i 倍は 90° 回転操作に相当する．こうして，xy 座標平面の x 軸に実軸，y 軸に虚軸を対応させて，実 2 次元平面と同一視できる複素平面が導入された．数直線という可視化により負数の存在が納得できたように，複素平面という可視化により虚数の存在が納得できただろうか．

百聞は一見にしかず，論より証拠，などという惹句から想像できるように，可視化は抽象概念を納得するための強力な切り札である．しかし，ただ可視化されただけでは人は納得しないはずだ．百聞の上に一見，論の積み上げの上に証拠，といったように，論理の正確性と十分な有用性が認容されているという土台があればこそ，可視化という切り札が威力を発揮する．

◎—心得 6．定義できれば半分わかったようなもの

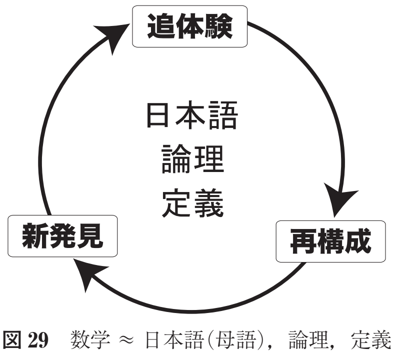


図 29　数学 ≈ 日本語(母語)，論理，定義

図 29 は「スウガクする」イメージの可視化である．

先人たちが築いてきた数学という文化を「追体験」し，自分の言葉でそれを「再構成」する．そして自分にとっての「新発見」が待っている．こうした「追体験・再構成・新発見」のサイクルの繰り返しが学ぶということであろう．中心に「日本語・論理・定義」と書いたが，これは数学を学ぶ上で大切なキーワードで，日本語は母語という意味である．思考は母語でなされるし，したがって数学も母語で考えるから，母語がしっかりしていないと話にならない．数学は記述言語であるし，概ね万国共通の言語であるが，その記述の論理的構成には母語による思考が必要不可欠である．

図 30
米原万里『不実な美女か貞淑な醜女(ブス)か』新潮文庫，1997

母語の重要性について，エッセイスト，作家，元ロシア語同時通訳者であった米原万里氏(1950-2006)は，図 30 の本において，次のように述べている．

《……私どもにとっての母語，つまり生まれてこのかた最初に身につけた言語，心情を吐露しモノを考えるときに意識的無意識的に駆使する，支配的で基

本的な言語というのは日本語である．第二言語すなわち最初に身につけた言語の次に身につける言語，多くの場合外国語は，この第一言語よりも，決して決して上手くはならない．単刀直入に申すならば，日本語が下手な人は，外国語を身につけられるけれども，その日本語の下手さ加減よりもさらに下手にしか身につかない．……》

図 29 の中心に，日本語，論理，の次に定義と書いたのは，定義をつくることこそ，数学の発展に深く関わった事柄だからである．数学における「定義，定理，証明」という形式は，人に伝えるために確立した技法といえる．そのなかで出発点である定義が数学的主張のもっとも核心である．物事をきちんと定義することは，深い思索を促し，数学を大きく発展させた．例えば「点」とは何かについて，紀元前 3 世紀頃のユークリッドによる点の定義から，19〜20 世紀のヒルベルトによる無定義用語という定義に至るまで，2000 年以上の時間をかけて定義が深化した．定義とは暗記するものではなく，定義に向き合い，なぜその定義に至ったのかを思い描くことが大切である．

数学用語だけではなく，あらゆる言葉はその定義が重要である．例えば，「コップ」．辞書を引くとコップとは「ガラス製の飲み物用の容器．カップ」に過ぎないが，これはコップを知っている人による一つの説明である．コップを見たことない人には伝わらない．そういった意味で，コップの核心，コップの定義に迫った谷川俊太郎の「コップへの不可能な接近」は秀逸である．（図 31．今月の新刊ちょっと立ち読みコーナー（http://bunko.shueisha.co.jp/yomi/0507_11.html）で閲読できる．）

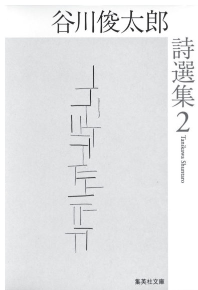


図 31
谷川俊太郎『谷川俊太郎詩選集 2』，集英社文庫，2005 に所収の「コップへの不可能な接近」（『定義』，思潮社，1975）

言葉の定義は，想像以上の難しさがある．岳は難しさを伝えるために次の例を出した．

子供　「みんなスマホもってるよ」「みんなスイッチもってるよ」「みんなが，こう言ってた」

大人　「みんな静かにしてるでしょ．だから静かにしなさい」「みんな塾行ってるし，うちの子も行かせないと……」

北野　「赤信号　みんなで渡れば　怖くない」

「みんなの定義はなんでしょう．みんなという集合はどんな集合でしょう．ネットで言われていることはみんなの意見なのでしょうか．テレビで放映されていることはみんなが納得する事実だけなのでしょうか．ねぇ，みなさん！

——みなさん，右の定義はご存じですか？　右の定義には東西南北を使います」と岳は言って，図 32 を見せた．

「まず，東は日の出の方，西は日の入りの方です．これはよいでしょう．そして，右は南を向いたとき西にあたる方と定義されます．あれ，南を定義していませんね．南は日の出の方に向かって右の方と定義されます……．わかりますか」

右は日の出の方に向かって右の方を向いたときの日の入りの方となり，右の定義に右を使っている．そうせざるを得ない．左は“犬が右向きゃ尾は左”のように右が決まれば決まる．あるいは，左は南を向いたとき東にあたる方（北は日の出の方に向かって左の方）といってもよいが，南は日の

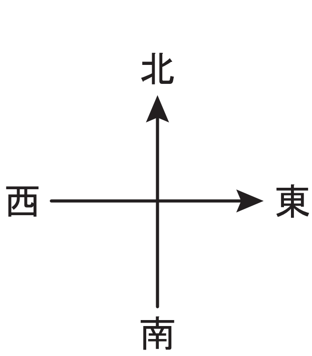


図 32　東西南北

出の方に向かって南を向いたとき日の入りにあたる方の方，だから結局，堂々巡りである．堂々巡りといえば，次の言葉遊びは昔から知られている．

いにしえの昔の武士のさむらいが，山の中なる山中で，馬から落ちて落馬して，女の婦人に笑われて，赤い顔して赤面し，家に帰って帰宅して，仏の前の仏前で，短い刀の短刀で，腹を切って切腹した．

岳は図 33 を見せて，「あなたはへのへのもへじ氏とパスワードを協議して決めようとしています．これはそのやりとりの様子を LINE 風のトーク画面にしたものです．パスワードはなんでしょう？ このやりとりで本当にパスワードは決まるのでしょうか」と言った．

図 33　パスワードを決めることはできるのか？

言いたいことをきちんと伝えるのはなかなか難しいものである．最後に言葉の定義を伝えるのは本当に難しいという例を，聴力と視力を失い，そしてほとんど発声ができなかった，いわゆる三重苦のヘレン・ケラーの本(図 34)から引用しよう．

ヘレン・ケラーの家庭教師サリバン先生は，ヘレンにものには名前があることを理解させようと毎日努力していた．映画『奇跡の人』でしばしば取り上げられるのは，ヘレンに井戸の水を触らせ，サリバン先生がヘレンの手のひらに w, a, t, e, r と指で何度も何度も書き，ついにヘレンは「水というもの」に名前があることを理解する有名なシーンである．ヘレンは同書の中でこう述べている．

図 34
ヘレン・ケラー(著)，小倉慶郎(訳)『奇跡の人 ヘレン・ケラー自伝』，新潮文庫，2004

《……ことばの神秘の扉が開かれたのである．この時はじめて，w-a-t-e-r が，私の手の上に流れ落ちる，このすてきな冷たいもののことだとわかったのだ．この「生きていることば」のおかげで，私の魂は目覚め，光と希望と喜びを手にし，とうとう牢獄から解放されたのだ！》

「数学に限らず，定義というのはそれをきちんと理解することがいかに難しいことか，ここまでの話やこのヘレン・ケラーの開眼と奇跡の人・サリバン先生の努力から伝わったことと思います．その気持ちを込めて，『心得 6．定義できれ

ば半分わかったようなもの』とまとめましょう」

心得 7. 若さ＋没頭 ＝ 素敵で無敵

「この講演タイトルは，『いかにして困難な問題に立ち向かうか』というお堅いものでした．そして，立ち向かう術(すべ)をいろいろな角度から，心得として紹介してきました．中学生や高校生のときにしかできないことは沢山あります．それはなぜか．最後の心得の話に入りましょう」と，岳は言って「若さ」について述べた．

「若さ」というのは，それだけで無条件にすばらしい．

　スウガクがわからん人も，英語が苦手な人も，スポーツばっかり得意な人も，スマホばっかり見ている人も，どんな得手不得手があっても！

若い人は必ず「若さ」を持っている．当たり前だが若いときには気が付かない(それも若さの特権！)．「若さ」というのは，それだけで無条件にすばらしい．年はとれるが若くはなれない．大人目線で「若さ」を見ると，

1. 先入観(経験)が少ない．
2. 何でも吸収できる．
3. 発想が柔らかい．
4. 体力がある．
5. 没頭できる．
6. 熱くなれる．
7. 感性が豊かである．
8. 無我夢中になれる．
9. 無茶できる．
10. …

など，言葉を尽くしても的確に表現できない．なんとも言えない「若さ」に集約され，そこに大人は期待している．

最後に「塵も積もれば山となる」という惹句は数学的に保証されていることを述べましょう，と岳は以下のように締めくくった．

みなさんが使っている実数の性質として「アルキメデスの公理」というものがあります．これは，

　どんなに山(Mountain)が大きくても
　どんなに塵(ε)が小さくても
　必ず，自然数 N が見つかって
　　塵 ε を N 倍すれば山 M を越えられる（$M < \varepsilon N$）

というものです(図 35)．

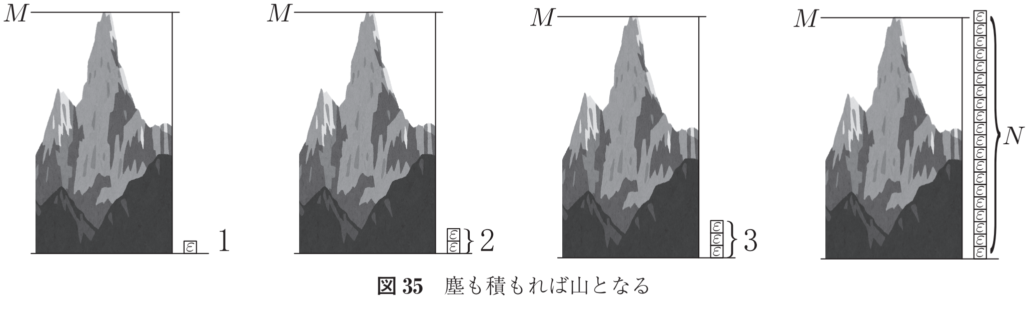


図 35　塵も積もれば山となる

普段使っている数の中に，こんな性質が内在しているなんて，素敵ではありませんか．小さなことでも没頭して塵が積もると，大きな山を越えて何かの形で返

ってくることは保証されているのです．それは自覚か無自覚かはわかりません．

若い今しか出来ないことはたくさんあります．最後の心得をみなさんに贈ります．

「心得 7．若さ＋没頭 ＝ 素敵で無敵」

大智くん，アシスタントどうもありがとう．みなさん，大智くんに拍手!!　そして，会場のみなさんも，熱心に聴いてくださりどうもありがとうございました．

講演後半のまとめ

心得 3. 思い込みをしていないか？　自問する

【実験 6】　普通でない道路標識

【実験 7】　350 ml 缶の斜め立て

【実験 8】　500 ml 缶の斜め立て

【実験 9】　ルービックキューブ 6×6 と 7×7 の差

心得 4. 逆さまに考える

【実験 10】　楕円の切り口

【実験 11】　1 点からの距離が等しい点の集まり

【実験 12】　ルーローの三角形

【実験 13】　内角の和は 180°

心得 5. 論理と有用性を認め，可視化で納得する

【実験 14】　回転実験

心得 6. 定義できれば半分わかったようなもの

心得 7. 若さ＋没頭 ＝ 素敵で無敵

（了）

（やざき・しげとし／明治大学理工学部）